Sokszínű matematika 9.

A KITŰZÖTT FELADATOK EREDMÉNYE

Összeállította:

FRÖHLICH LAJOS

gimnáziumi tanár

A Kombinatorika, halmazok
c. fejezetet szakmailag ellenőrizte:

DR. HAJNAL PÉTER

egyetemi docens

Tartalom

Kombinatorika, halmazok

1. Számoljuk össze

1. $5! = 120$.

2. *a)* $3! = 6$; *b)* $4! = 24$; *c)* $5! = 120$;
d) $6! = 720$; *e)* $7! = 5040$.

3. *a)* 4!; *b)* ez nem lehet; *c)* 2; *d)* $4 \cdot 2 = 8$.

4. 6894 számjegyet (10 db 1 jegyű, 90 db 2 jegyű, 900 db 3 jegyű, 1001 db 4 jegyű).

5. Ez 1000 db szám, és minden 10-edik 1-re végződik, így 100 db. A második helyi értéken $10 \cdot 10$ db, a harmadikon 100 db van. Összesen 300 db.

6. *a)* 23 db 3-as $\rightarrow$ 129-ig; *b)* 82 db 3-as $\rightarrow$ 319-ig; *c)* 181 db 3-as $\rightarrow$ 412-ig.

7. *a)* $4^4 = 256$; *b)* 96; *c)* 64; *d)* 32.

8. 6741.

9. *a)* Ha a testeket elmozdíthatjuk, akkor kevesebb vágással is megoldhatjuk a feladatot. Két egyirányú vágással elérhetjük, hogy egy $5 \times 5 \times 1$ és két $5 \times 5 \times 2$ méretű téglatesthez jussunk. Egyetlen vágással meg tudjuk felezni a két nagyobb testet (és így öt darab $5 \times 5 \times 1$ méretű téglatesthez jutunk), ha a felezendő testeket a megfelelő módon átrendezzük. Így 3 vágással elérjük, amit előbb 4-gyel tettünk meg. Összesen $3 + 3 + 3 = 9$ vágással boldogulunk.
Kevesebb vágás nem elég. Egy vágás után a nagyobb test tartalmaz egy $5 \times 5 \times 3$-as téglatestet. Ezt a részt kövessük és az átrendezéseinket mindig úgy végezzük el, hogy a követett test ne mozduljon (ezt megtehetjük). A követett test mindig a nagyobbik maradék lesz. Az egyes vágás által érintett oldalakra adható alsó becslés $5 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ módon változik. Azaz valóban minden irányban legalább három vágásra szükség is van.
b) $4 + 5 \cdot 4 + 25 \cdot 4 = 124$ vágásra.
Másképpen: Minden vágás eggyel több testet ad. 125 darab kis kockához 124 vágás vezet el.
c) $3^3 = 27$, melynek nincs; $6 \cdot 3 \cdot 3 = 54$, melynek 1; $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ melynek 2 és 8 olyan, melynek 3 piros lapja van. 4, 5, 6 piros lapot tartalmazó kis kocka nincs.

10. *a)* 7 különböző testet.

11. *a)* 1; *b)* 2; *c)* 2; *d)* 2.

12. Ákos 6 párnál nyer, Zsombor 23 párnál.

13. Gabi 15-féleképpen és Zsuzsi 21-féleképpen.

14. Kati 16-féleképpen, Dani 20-féleképpen.

15. Zsófi 15-féleképpen, Dorka 21-féleképpen.

16. Tibi 20-féleképpen, Pisti 16-féleképpen.

17. Egyik nyer, ha a dobott számok összege 7-nél kisebb, a másik, ha nagyobb, és döntetlen, ha 7.

18. e: azon napok, amikor délelőtt esett, u: amikor délután, n: amikor nem esett.
Így $e+n=12$, $u+n=9$, $e+u=11$. Innen $e=7$, $n=5$, $u=4$. 5 napon nem volt eső.

Rejtvény: $16+9+4+1=30$ négyzetet.

2. Halmazok

1. *a)* {január, március, május, július, október, december};
b) $\emptyset$;
c) {január, február, március, április, szeptember, október, november, december};
d) {kedd, szerda, péntek};
e) {Budapest, Győr, Pécs, Debrecen, Szeged}.

2. *a)* {cs, dz, sz, zs, ty, ly, gy, ny};
b) {Duna};
c) {Európa, Ázsia, Afrika, Ausztrális, Amerika, Antarktisz};
d) {80};
e) $\emptyset$.

3. *a)* igaz; *b)* hamis; *c)* igaz; *d)* hamis; *e)* igaz; *f)* hamis.

4. *a)* igaz; *b)* igaz; *c)* igaz; *d)* igaz; *e)* hamis.

5. *a)* $\emptyset$ $\{3\}$ $\{3; 5\}$
$\{5\}$

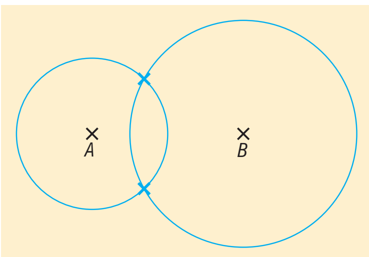
b) $\emptyset$ $\{a\}$ $\{a, b\}$ $\{b, c\}$ $\{a, b, c\}$ $\{a, b, c, d\}$
$\{b\}$ $\{a, c\}$ $\{b, d\}$ $\{a, b, d\}$
$\{c\}$ $\{a, d\}$ $\{c, d\}$ $\{b, c, d\}$
$\{d\}$ $\{a, c, d\}$

c) $\emptyset$ {●} {●, ■} {●, ■, ▲}
{■} {●, ▲}
{▲} {■, ▲}

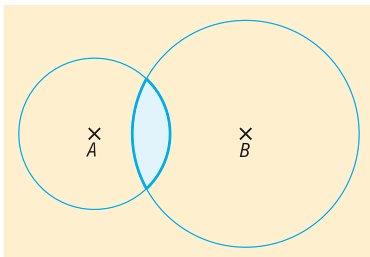
d) Legyen ♣ = a, ♦ = b, ♥ = c, ♠ = d; és lásd a *b)* részt.

6. *a)* hamis; *b)* igaz; *c)* igaz; *d)* igaz; *e)* hamis; *f)* hamis.

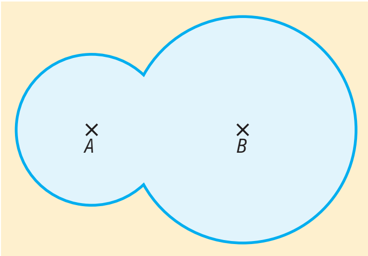
7. *a)*



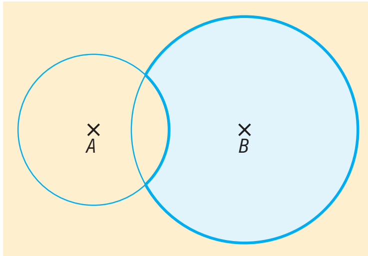
b)



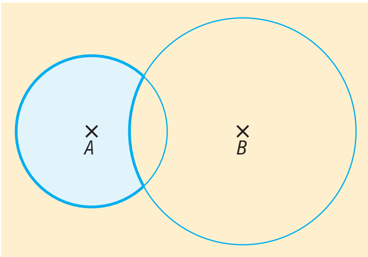
c)



d)



e)



8. $2^5 - 1 = 31$ féle összeget, a legnagyobb 185 Ft.

9. *a)* igaz; *b)* hamis; *c)* igaz; *d)* igaz; *e)* igaz; *f)* hamis.

3. Halmazműveletek

1. *a)* $\overline{A} = \{1; 3; 5; 7; 9; 10\}$
$\overline{B} = \{2; 5; 8; 9; 10\}$
$A \cap B = \{4; 6\}$
$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8\}$

b) $\overline{A} = \{d; e; f\}$
$\overline{B} = \{a; b; c\}$
$A \cap B = \emptyset$
$A \cup B = U$

c) $\overline{A} = \{á; é; í; ó; ú; ü; ű\}$
$\overline{B} = \{a; á; é; i; í; ó; ú; ü; ű\}$
$A \cap B = \{e; o; u\}$
$A \cup B = A$

d) $\overline{A} = \{k; o; r\}$
$\overline{B} = \{p; e; n; o; r\}$
$A \cap B = \{é; s; z\}$
$A \cup B = \{p; e; n; é; s; z; k\}$

e) $\overline{A} = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 11; ...; 14; 16; ...\}$
$\overline{B} = \{1; ...; 9; 11; ...; 19; 21; ...; 29; ...\}$
$A \cap B = B$
$A \cup B = A$

f) $\overline{A} = B$
$\overline{B} = A$
$A \cap B = \emptyset$
$A \cup B = U$

g) $\overline{A} = \{$6-tal nem osztható számok$\}$
$\overline{B} = \{$4-gyel nem osztható számok$\}$
$A \cap B = \{$12-vel osztható számok$\}$
$A \cup B = \{$6-tal vagy 4-gyel osztható számok$\}$

h) $\overline{A} = \{$15-tel nem osztható számok$\}$
$\overline{B} = \{$6-tal nem osztható számok$\}$
$A \cap B = \{$30-cal osztható számok$\}$
$A \cup B = \{$15-tel vagy 6-tal osztható számok$\}$

i) $\overline{A} = \{$olyan paralelogrammák, melyekben nincs derékszög$\}$
$\overline{B} = \{$olyan paralelogrammák, melyeknek van különböző hosszú oldala$\}$
$A \cap B = \{$négyzetek$\}$
$A \cup B = \{$olyan paralelogrammák, melyeknek oldaluk vagy szögük egyenlő$\}$

j) $\overline{A} = \{$olyan négyszög, melyben nincs két-két szomszédos egyenlő oldal$\}$
$\overline{B} = \{$olyan négyszög, melyben az átlók nem felezik egymást$\}$
$A \cap B = \{$rombuszok$\}$
$A \cup B = \{$két-két oldaluk egyenlő$\}$

k) $\overline{A} = B$
$\overline{B} = A$
$A \cap B = \varnothing$
$A \cup B = U$

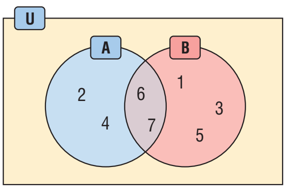
l) $\overline{A} = B$
$\overline{B} = A$
$A \cap B = \varnothing$
$A \cup B = U$

m) $\overline{A} = \{$nempozitív számok$\}$
$\overline{B} = \{$nemnegatív számok$\}$
$A \cap B = \varnothing$
$A \cup B = U \setminus \{0\}$

n) $\overline{A} = \{$negatív számok$\}$
$\overline{B} = \{$pozitív számok$\}$
$A \cap B = \{0\}$
$A \cup B = U$

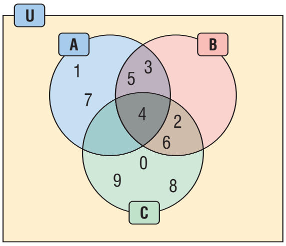
2. *a)* $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}$ és $n > 15\}$; *b)* $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}$ és $n < 30\}$.

3.



a) $\overline{A} = \{1; 3; 5\}$	*b)* $\overline{B} = \{2; 4\}$	*c)* $\overline{A} \cup B = B$
d) $\overline{A} \cap B = \overline{A}$	*e)* $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$	*f)* $A \cup \overline{B} = A$
g) $A \cap \overline{B} = \overline{B}$	*h)* $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$	*i)* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
j) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	*k)* $A \setminus B = \overline{B}$	*l)* $\overline{A} \setminus B = \varnothing$
m) $A \setminus \overline{B} = \{6; 7\}$	*n)* $\overline{A} \setminus \overline{B} = \overline{A}$	*o)* $\overline{A \setminus B} = B$
p) $A \cup U = U$	*q)* $B \cap U = B$	*r)* $A \setminus U = \varnothing$

4.



a) $\bar{A} \cap \bar{B} = \{0; 8; 9\}$

b) $\bar{A} \cap B = \{2; 6\}$

c) $\overline{A \cap B} = \{0; 1; 2; 6; 7; 8; 9\}$

d) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

e) $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$

f) $A \cup \bar{B} = \{0; 1; 3; 4; 5; 7; 8; 9\}$

g) $A \cap \bar{B} = \{1; 7\}$

h) $A \cup C = U$

i) $B \cap C = \{2; 4; 6\}$

j) $\bar{B} \cup C = \{0; 1; 2; 4; 6; 7; 8; 9\}$

k) $(A \cap B) \cup C = \{0; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9\}$

l) $(A \cup B) \cap C = \{2; 4; 6\}$

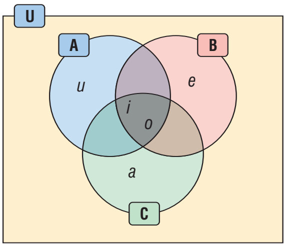
m) $(\bar{A} \cap B) \cup C = C$

n) $(\bar{A} \cup B) \cap \bar{C} = \{3; 5\}$

o) $\overline{A \cup B} \cap \bar{C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \varnothing$

p) $\varnothing$

5.



a) hamis *b)* hamis *c)* igaz

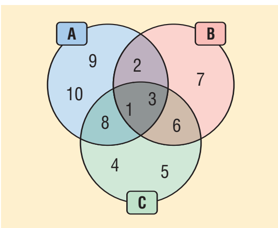
d) hamis *e)* igaz *f)* hamis

g) igaz *h)* igaz

6. *a)* $A = \{5; 8; 9; 10\}$
$B = \{5; 6; 7\}$

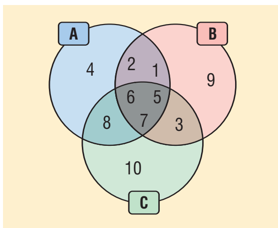
b) $A = \{7\}$
$B = \{5; 6; 8; 9; 10\}$

7. *a)*



$A = \{1; 2; 3; 8; 9; 10\}$
$B = \{1; 2; 3; 6; 7\}$
$C = \{1; 3; 4; 5; 6; 8\}$

b)



$A = \{1; 2; 4; 5; 6; 7; 8\}$
$B = \{1; 2; 3; 5; 6; 7; 9\}$
$C = \{3; 5; 6; 7; 8; 10\}$

10. *a)* igaz *b)* nem szükségszerűen igaz
c) nem szükségszerűen igaz *d)* igaz

11. *a)* nem igaz *b)* nem igaz *c)* igaz *d)* igaz

12. *a)* nem szükségszerűen igaz *b)* igaz *c)* nem szükségszerűen igaz

13. *a)* 12 cm^2, a sárga és a kék terület ugyanakkora, hisz a metszettel kiegészítve ugyanakkora négyzetet adnak.
b) 4 cm^2, a különbség 0 cm^2.

Rejtvény: Nincs hiba, mindkét állítás lehet igaz egyszerre, mivel nem állítja, hogy két nyelvet nem tanulhat valaki.

4. Halmazok elemszáma, logikai szita

1. *a)* 20 *b)* 12 *c)* 8

2. *a)* 45 *b)* 14 *c)* 9

3. *a)* 41 *b)* 13 *c)* 95 *d)* 64

4. 51 lépcsőfokot használnak pontosan ketten.

5. *a)* 33 *b)* 26 *c)* 22 *d)* 25

6. $0{,}8 \cdot 15 = 12$ tanuló matematika szakkörre és kosarazni is jár. $12 / 0{,}3 = 40$ tanuló kosarazik.

7. Az első és a második problémát legalább $90 + 80 - 100 = 70$ tanuló oldotta meg. A harmadik és negyedik problémát legalább $70 + 60 - 100 = 30$ tanuló. Mivel ennek a két halmaznak nem lehet közös eleme, pontosan ennyi az elemszámuk. Tehát 30 tanuló nyert díjat.

8. Barna szemű és sötét hajú tanuló legalább $14 + 15 - 20 = 9$ van. 50 kg-nál nehezebb és 160 cm-nél magasabb pedig $17 + 18 - 20 = 15$. Ezen két halmaz metszetében, azaz akik mind a négy tulajdonsággal rendelkeznek, legalább $15 + 9 - 20 = 4$ tanuló van.

9. Mivel 2 jeles tanuló, sportoló lány van a 10 sportoló lány között, a 6 nem jeles lány közül 8-nak kellene sportolnia, ami lehetetlen.

10. Akkor oldható meg, ha egyetlen férj sem azonos magasságú, illetve súlyú a feleségével. Legyen x a feleségüknél magasabb férjek száma. Így $\frac{2}{3}x$ a magasabb és nehezebb, $\frac{1}{3}x$ a magasabb és könnyebb és $\frac{2}{9}x$ az alacsonyabb és nehezebb férjek száma. Tehát

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x + 120 = 1000.$$

Innen $x = 720$.
480 férj nehezebb és magasabb, mint a felesége.

11. $A = \{1; 2; 3\}$
$B = \{3; 4; 5\}$
$C = \{5; 2; 6\}$
$D = \{1; 4; 6\}$

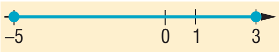
Megfelelő öt halmaz: $A = \{1; 2; 3; 4\}$
$B = \{1; 5; 6; 7\}$
$C = \{2; 7; 8; 9\}$
$D = \{3; 6; 9; 10\}$
$E = \{4; 5; 8; 10\}$

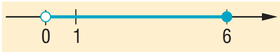
Öt darab 3 elemű halmaz nem adható meg.

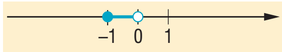
12. $A = \{3n \text{ vagy } 3n+1 \text{ alakú számok, } n \in \mathbb{N}\}$
$B = \{3n+1 \text{ vagy } 3n+2 \text{ alakú számok, } n \in \mathbb{N}\}$
$C = \{3n \text{ vagy } 3n+2 \text{ alakú számok, } n \in \mathbb{N}\}$

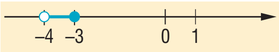
Rejtvény: H, E, A, B, C, F, Y, G, D a sorrend.

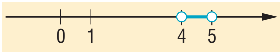
5. Számegyenesek, intervallumok

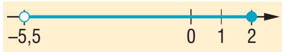
1. *a)* 

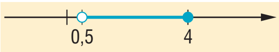
b) 

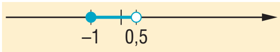
c) 

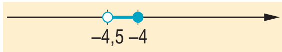
d) 

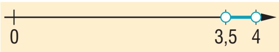
e) 

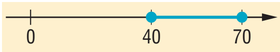
f) 

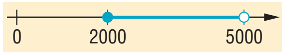
g) 

h) 

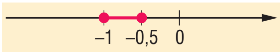
i) 

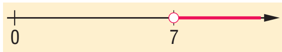
j) 

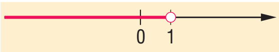
k) 

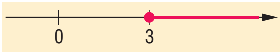
l) 

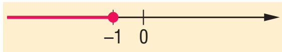
2. *a)* 

b) 

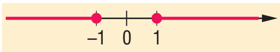
c) 

d) 

e) 

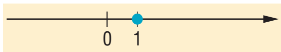
f) 

g) 

h) 

3. *a)* [–4; 6[*b)*]–6; 0] *c)* [0; 8] *d)*]–2; 3[*e)*]3; 6]

4. *a)* ∅

b) {1} 

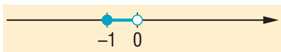
c) ∅

d) [0; 3[

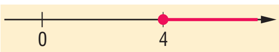
e)]–1; 3] 

f) [0; 3] 

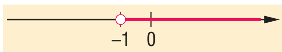
g) [–1; 3] 

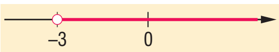
h) [–1; 0] 

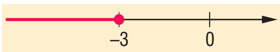
5. *a)*]3; 5[
b)]–6; –4[∪]–2; 2[∪]4; 6[
c)]–6; –3[∪]–3; –1[∪]1; 3[∪]3; 6[

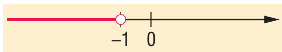
6. *a)* 

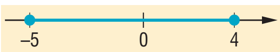
b) 

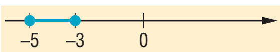
c) 

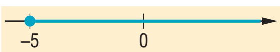
d) 

e) 

f) 

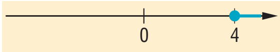
7. $A \cap B = [-5; 4]$ 

$B \cap E = [-5; -3]$ 

$C \cap F = \varnothing$
$A \cap F = \varnothing$
$B \cup C = [-5; \infty[$ 

$E \cap D = \emptyset$

$A \cap C \cap D = [4; \infty[$



$B \cap F \cap C = \emptyset$

8. *a)* igaz *b)* hamis *c)* hamis *d)* igaz *e)* igaz *f)* igaz

Rejtvény: Például: $8 \cdot 8 \cdot (8+8) - (8+8+8)$.

Algebra és számelmélet

1. Betűk használata a matematikában

1. *a)* 5-tel osztva 2 maradékot adó pozitív egész számok.
b) 5-tel osztva 2 maradékot adó pozitív egész számok.
c) Racionális számok.

2. Racionális számok.

3. $4m+1$; $m \in \mathbb{N}$.

4. $-\frac{3}{7}$; $-7{,}83$; 14; $-10{,}6$; 14; -21.

5. *a)* $3a^2-4a+1 < \frac{4a-2}{a-1}$; *b)* $-3ab+18ab^2-a^3 > \frac{1}{2}a-12b$;
c) $2abc-4ab^2c+4c^2 < \frac{3-c}{2-b}-\frac{c}{a+1}$.

6. *a)* $x \neq 0$; *b)* $x \neq 0$;
c) $x \neq -\frac{4}{5}$, $x \neq \frac{2}{3}$; *d)* $x \neq -\frac{5}{2}$, $x \neq -\frac{3}{2}$, $x \neq 0$;
e) $x \neq -2$, $x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{3}$, $x \neq 2$.

7. *a)* -6; *b)* 1; *c)* $-\frac{19}{4}$; *d)* $\frac{27}{4}$;
e) $-\frac{74}{21}$; *f)* nincs értelmezve.

8. $s = v \cdot t + (v-3) \cdot (t+1)$

9. *a)* A könyvek száma: $t \cdot k + m$. *b)* A könyvek száma: $(t-j) \cdot k$.

10. $a \cdot l \leq t \leq a \cdot f$

2. Hatványozás

1. *a)* $5^{12} > (5^5)^2$; *b)* $2^4 \cdot 2^5 > (2^4)^2$;
c) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{3^4}$; *d)* $3^6 = (3^2)^3 < (3^2 \cdot 3^3)^2 = 3^{10}$;
e) $3^9 \cdot 5^9 = 15^9 < 9^{15} = 3^{10} \cdot 9^{10}$;
f) $5^{12} \cdot 2^{14} \cdot 16 = 125^4 \cdot 64^3 < 100^7 = 5^{12} \cdot 2^{14} \cdot 25$.

2. *a)* 64000; *b)* 343; *c)* $\frac{1}{4}$; *d)* $3^{16} = 43046721$;

e) $\frac{4}{3}$; *f)* $\frac{2^{17}}{5^4}$; *g)* 529; *h)* $\frac{1}{7}$.

3. *a)* a^6b^3; *b)* $a^5,\ a \neq 0$; *c)* $ab^2,\ a$ és $b \neq 0$; *d)* $xy^2,\ x$ és $y \neq 0$;

e) $2xy,\ x$ és $y \neq 0$; *f)* $\frac{a^4}{b^2},\ a$ és $b \neq 0$; *g)* $a^3b^2,\ a$ és $b \neq 0$.

4. *a)* 2000; *b)* 35; *c)* 32; *d)* 15.

Rejtvény: $b = 4,\ c = 3,\ a = 2$.

3. Hatványozás egész kitevőre

1. *a)* $\frac{1}{8}$; *b)* $\frac{1}{9}$; *c)* 9;

d) $-\frac{3}{2}$; *e)* 5; *f)* $\frac{1}{5}$;

g) $\frac{7^{14}}{3^3}$; *h)* $\frac{25}{2}$; *i)* $\frac{3}{5^{11}}$.

2. *a)* $\frac{b^2}{a^2},\ a$ és $b \neq 0$; *b)* $\frac{1}{8x^3},\ x \neq 0$; *c)* $\frac{b}{a^4},\ a$ és $b \neq 0$;

d) $\frac{1}{a^{16}},\ a \neq 0$; *e)* $\frac{a^{10}}{4b^8},\ a$ és $b \neq 0$; *f)* $\frac{y^8}{x^3},\ x$ és $y \neq 0$;

g) $a^4 \cdot b^8$, a és $b \neq 0$; *h)* $2^7 \cdot x^{32} \cdot y^2$, x és $y \neq 0$.

3. *a)* $2^{-4} \cdot 3^3 \cdot 5^{-4}$; *b)* $2^9 \cdot 3^{-4}$; *c)* $5^4 \cdot 2^{-8}$.

4. *a)* 2; *b)* 10; *c)* 1;
d) 49; *e)* 4096.

5. *a)* $4^{-3} = \frac{1}{64} > \frac{1}{81} = 3^{-4}$; *b)* $10^{-7} = \frac{1}{10^7} > \frac{1}{25 \cdot 10^6} = 2^{-6} \cdot 5^{-8}$;

c) $32^{-5} = \frac{1}{2^{25}} > \frac{1}{3 \cdot 2^{24}} = 3^{-7} \cdot (3 \cdot 2^{-4})^6$; *d)* $3^7 \cdot 6^{-8} = \frac{1}{3 \cdot 2^8} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \cdot 18^{-3}$.

Rejtvény: $a = 3,\ b = 5,\ c = 2,\ d = 0$.

4. A számok normál alakja

1. $2 \cdot 10^7$ szemet tartalmaz.

2. 500 másodperc $= \frac{25}{3}$ perc ~ 8,3 perc.

3. $6{,}25 \cdot 10^{15}$ elektron.

6. A bolygók össztömege ~ $266\,900 \cdot 10^{22}$ kg $= 2{,}669 \cdot 10^{27}$ kg. A Nap tömege $1990 \cdot 10^{27}$ kg. Az arány 0,134%.

Rejtvény: $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 5$.

5. Egész kifejezések (polinomok)

1. $0{,}4a^2 - 2b$; $-2d^3 + 3$; $2{,}3g^2 - 3g^4$; $38s^3t^2 - 7s^2t$; $11x^4y^2$.

2. *a)* $3y^2 + 4y - 3$; *b)* $5x^3 - x^2 - x - 4$; *c)* $2a^2b - ab + b^2$.

3. *a)* $-3y - 1$; *b)* $-6x^2 + 9x$; *c)* $5a^2b + 6ab - 11ab^2$;
d) $-a^2 - a$; *e)* $14x$; *f)* $3x^2y + 13xy + 4xy^2$.

4. *a)* $28a^2 - 12a$; *b)* $6x^3 - 9x^2 + 21x$; *c)* $6a^3 + 3a^2 - 21a$;
d) $-6a^2 + 13a - 6$; *e)* $6x^3 - 3x^2 - 8x + 15$; *f)* $8x^4 + 14x^3 + 3x^2 - 5x - 2$.

5. *a)* $a^2 + 4a + 4$; *b)* $49a^2 - 42a + 9$; *c)* $64a^2 - 1$;
d) $a^2 + b^2 + 2ab + 2a + 2b + 1$.

6. Az együtthatók összegét az $x = 1$ helyettesítéssel kapjuk, ami 1.

6. Nevezetes szorzatok

1. *a)* $36a^2 - 60ab + 25b^2$; *b)* $100a^2 + 40ab + 4b^2$; *c)* $64x^2 + 48xy + 9y^2$;
d) $49x^4 + 42x^2 + 9$; *e)* $a^2 - 18ab^3 + 81b^6$; *f)* $16a^4 - 40a^2b^5 + 25b^{10}$;
g) $\frac{25}{49}a^2 + \frac{10}{21}ab + \frac{1}{9}b^2$; *h)* $\frac{49}{121}x^8 - \frac{21}{44}x^4y^3 + \frac{9}{64}y^6$.

2. *a)* $4a^2 + 16b^2 + c^6 + 16ab + 4ac^3 + 8bc^3$;
b) $25x^2 + 9y^4 + 4 + 20x - 30xy^2 - 12y^2$;
c) $36x^2 + \frac{4}{9}y^2 + 16z^4 - 8xy - 48xz^2 + \frac{16}{3}yz^2$;
d) $\frac{9}{16}a^2 + \frac{4}{9}b^2 + \frac{1}{49} - ab + \frac{3}{14}a - \frac{4}{21}b$;
e) $4a^2 + 9b^2 + 16c^2 + d^2 - 12ab + 16ac - 4ad - 24bc + 6bd - 8cd$.

3. a) $27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3$; b) $64a^6-96a^4b+48a^2b^2-8b^3$;

c) $\frac{x^3}{8}+\frac{3}{2}x^2y+6xy^2+8y^3$; d) $\frac{8}{125}x^3-\frac{4}{25}x^2y^3+\frac{2}{15}xy^6-\frac{1}{27}y^9$;

e) $\frac{1}{64}a^6+\frac{15}{16}a^4b+\frac{75}{4}a^2b^2+125b^3$; f) $\frac{27}{125}a^3-\frac{54}{125}a^2b+\frac{36}{125}ab^2-\frac{8}{125}b^3$.

4. a) $49x^2-36y^2$; b) $9a^2-25b^2$; c) $\frac{x^2}{25}-49$; d) x^4-36a^2;

e) $1{,}44a^6-81b^4$; f) $64x^4y^2-9x^2y^4$; g) $\frac{a^2}{4}-\frac{121}{4}b^2$; h) $\frac{36}{25}x^4-\frac{4}{25}y^4$.

5. a) $x^4+8x^3+12x^2y-46x^2+6xy^2+y^3+y^2+25$;
b) $-5x^2-4xy+4y^2$; c) $150a^2b-80a^2+2b^3+45b^2$;
d) $\frac{7}{2}x^3+\frac{13}{2}x^2+\frac{39}{2}x+16$; e) $\frac{25}{9}a^2+\frac{16}{3}a-8$.

6. a) $(x-3)^2+1$; b) $(x+6)^2+3$; c) $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$;

d) $\left(x+\frac{21}{2}\right)^2-\frac{357}{4}$; e) $3(x-1)^2+5$; f) $-2\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$.

7. a) a^3-8; b) b^3+27; c) $8x^3-27$.

8. a) $\frac{800\cdot 74}{1000\cdot 74}=\frac{4}{5}$; b) $(100-4)\cdot(100+4)=10\,000-16=9984$.

9. a) $900-1=(30+1)\cdot(30-1)=31\cdot 29$;
b) $7778^2-2223^2=(7778+2223)\cdot(7778-2223)=10\,001\cdot 5555=55\,555\,555$.

Rejtvény: $632\,757\cdot 632\,763=(632\,760-3)\cdot(632\,760+3)=632\,760^2-9$;
tehát $632\,757\cdot 632\,763<632\,760^2$.

7. A szorzattá alakítás módszerei

1. a) $4x(3x^2-2x+1)$; b) $2a^2b(3a-4b)$; c) $10xy(2x-3y)$;
d) $7x2y^3(1-2x+3y)$; e) $6a^5b^3(3a^2b+b^4+5a^5)$; f) $10xy(2x-3y)$.

2. a) $(a-b)\cdot(x-y)$; b) $2(a+2)\cdot(3x+y)$; c) $(x-7)\cdot(4a-b)$;
d) $(5a+2b)\cdot(3x-2y)$; e) $(6a-b)\cdot(2x+3y)$; f) $(3y+2)\cdot(2x-1)$;
g) $6a^2x-9xa+2a-3=(2a-3)\cdot(3ax+1)$;
h) $(2a+b)\cdot(2a-b)\cdot(2x+y)$.

3. *a)* $(8x-3)^2$; *b)* $(11+4x)^2$;

c) $(3a+7b)\cdot(3a-7b)$; *d)* $\left(\frac{2}{3}x+y\right)\cdot\left(\frac{2}{3}x-y\right)$;

e) $(7a^2+2b)^2$; *f)* $(4a^2+1)\cdot(2a+1)\cdot(2a-1)$;

g) $(6a^3-5b^2)^2$; *h)* $\left(\frac{3}{7}x-\frac{2}{3}y\right)^2$;

i) $(a^8+1)\cdot(a^4+1)\cdot(a^2+1)\cdot(a+1)\cdot(a-1)$.

4. *a)* $5(3x-4)^2$; *b)* $3a^2(a^2+3b)^2$;
c) $2a^2b(2b-a^2)^2$; *d)* $(x-7)\cdot(x+3)$;
e) $2(x+5)\cdot(x-1)$; *f)* $(x^2+3)\cdot(3x^2+4)$.

5. *a)* $(x^2+x+1)\cdot(x^2+x+1)$; *b)* $(x^2-2x+2)\cdot(x^2+2x+2)$;
c) $(x^4+2x^2+2)\cdot(x^4-2x^2+2)$.

Rejtvény: (113; 112); (39; 36); (25; 20); (17; 8); (15; 0).

8. Műveletek algebrai törtekkel

1. *a)* $\frac{x^2}{2y^2}$, x és $y \neq 0$; *b)* $\frac{3(2x-3)}{2x+3}$, $x \neq \pm\frac{3}{2}$;

c) $\frac{3x-1}{3x+1}$, $x \neq \pm\frac{1}{3}$; *d)* $\frac{x-3}{2x+5}$, $x \neq -\frac{5}{2}$;

e) $\frac{x+5}{x-5}$, $x \neq 5$ és $x \neq -3$; *f)* $\frac{3a+1}{a-1}$, $a \neq 1$ és $b \neq -\frac{3}{2}$.

2. *a)* $\frac{9ab^2y^2}{8x}$; *b)* $\frac{5a^2y}{6x}$; *c)* $\frac{x(x+4)}{3(x^2+4)\cdot(3x-2)}$;

d) $\frac{2(2b+3)}{3b-2}$; *e)* –2; *f)* 6;

g) $\frac{3}{5(a-b)}$; *h)* $\frac{2(x-1)}{x+1}$.

3. *a)* $\frac{3x+2}{2x^2}$, $x \neq 0$; *b)* $\frac{5-21a}{15a^2}$, $a \neq 0$;

c) $\frac{3x}{2(3x+1)}$, $x \neq -\frac{1}{3}$; *d)* $\frac{-b^2+2b+6}{(b+2)^2}$, $b \neq -2$;

e) $\dfrac{4a^2-2a+3}{(2a+3)\cdot(2a-3)^2}$, $a \neq \pm\dfrac{3}{2}$; *f)* $\dfrac{3a^2-51a+98}{(a+7)\cdot(a-7)^2}$, $a \neq \pm 7$;

g) $-\dfrac{2(9y+1)}{(3y+1)^2\cdot(3y-1)^2}$, $y \neq \pm\dfrac{1}{3}$; *h)* $\dfrac{4x}{(x+1)\cdot(x-1)^3}$, $x \neq \pm 1$.

Rejtvény: az összeg 102.

9. Oszthatóság

1. Mivel $8 \mid 1000$, egy $1000a+b$ $(a;\, b \in \mathbb{N})$ alakú szám akkor és csak akkor osztható 8-cal, ha $8 \mid b$.

2. A 2^{4k+2} $(k \in \mathbb{N})$ alakú számok 4-re végződnek, a 6-ra végződő számok pozitív egész kitevőjű hatványai pedig 6-ra. Így a $426^{19}+2^{58}$ 0-ra végződik, tehát osztható 10-zel.

3. A $3k+1$ $(k \in \mathbb{N})$ alakú számok pozitív egész kitevőjű hatványainak 3-as maradéka 1. Mindhárom alap ilyen alakú, tehát az összeg osztható 3-mal.

4. *a)* Tudjuk, hogy $15 \mid k \Leftrightarrow 5 \mid k$ és $3 \mid k$.
   $5 \mid \overline{5x327y} \Leftrightarrow y = 0;\, 5.$

   $y = 0$: $3 \mid \overline{5x3270} \Leftrightarrow x = 1;\, 4;\, 7.$

   $y = 5$: $3 \mid \overline{5x3275} \Leftrightarrow x = 2;\, 5;\, 8.$

5. $20a+6b = 3(a+2b)+17a$. A feltétel miatt mindkét tag osztható 17-tel, így az összeg is osztható.

6. Ha $p = 2$, akkor $p+7 = 9$, mely nem prím.
   Ha $p > 2$, akkor páratlan, és $p+7$ páros, tehát nem lehet prím.
   Tehát nincs ilyen p prímszám.

7. Van, például $p = 3$.

8. *a)* 3 a maradék; *b)* 2 a maradék; *c)* 0 a maradék.

9. *a)* 5 a maradék; *b)* 5 vagy 11 a maradék.

10. 27-nek 4 osztója, 48-nak 10 osztója, 64-nak 7 osztója, 121-nek 3 osztója, 500-nak 12 osztója, 625-nek 5 osztója van. A nem négyzetszámoknak van páros számú osztója.

11. A 48 a legkisebb ilyen szám.

10. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

1. *a)* $\frac{19}{23}$; *b)* $\frac{2}{33}$; *c)* $\frac{15}{7}$.

2. Legközelebb 408 méter távolságra fordul elő.

3. Kétszer, 8.30-kor és 11.00-kor.

4. Igaz.

5. 35 és 140, vagy 70 és 105.

6. $a = 2 \cdot 3$; $b = 3 \cdot 5$; $c = 5 \cdot 7$.

7. $[a; b] = b$ és $(a + b; b) = a$.

8. $a = 9$; 18; 36; 72.

9. Tudjuk, hogy $7 \mid x$ és $60 \mid x - 1$. Így a legkisebb ilyen szám a 301.

10. Bontsuk fel a-t és b-t prímtényezős alakban. A közös tényezők közül a kisebb kitevőjűek az $(a; b)$-ben, a nagyobb kitevőjűek az $[a; b]$-ben, az azonos kitevőjűek mindkettőben szerepelnek. A nem közös tényezők $[a; b]$-ben szerepelnek a bal oldalon. Így a illetve b tényezői közül mind szerepel a bal oldalon és más tényezők nem. Tehát a két oldal egyenlő.

Rejtvény: Mivel $(a; b) \mid [a; b]$, $(a; b) \mid a$ és $(a; b) \mid b$, ezért $(a; b) \mid p$. Tehát $(a; b) = p$ vagy $(a; b) = 1$.

a) Ha $(a; b) = p$, akkor

$$a = k \cdot p;\ \ b = l \cdot p;\ \ (k; l) = 1;\ \ k, l \in \mathbb{Z}^+.$$

Így

$$k \cdot l \cdot p + p = k \cdot p + l \cdot p + p,$$
$$(k - 1) \cdot (l - 1) = 1.$$

Ez nem lehet, hisz $k = l = 2$ kellene legyen.

b) Ha $(a; b) = 1$, akkor $[a; b] = a \cdot b$.

Így

$$a \cdot b + 1 = a + b + p,$$
$$(a - 1) \cdot (b - 1) = p.$$

Az egyik tényező 1, a másik p. Legyen $a = 2$ és $b = p + 1$. Ha $(a; b) = 1$, akkor p nem lehet páratlan, tehát $p = 2$.

Tehát $a = 2$, $b = 3$, $p = 2$.



11. Számrendszerek

1. *a)* $34056_8 = 3 \cdot 8^4 + 4 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8 + 6 = 14382$;
b) $10111101_2 = 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1 = 189$;
c) $22302_5 = 2 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 = 1577$.

2. Mivel $12150301_6 = 387613$, és $1365034_8 = 387612$, ezért $12150301_6 > 1365034_8$.

3. *a)* $1572 = 11000100100_2$; *b)* $1572 = 120210_4$; *c)* $1572 = 4404_7$.

4. $34251_6 = 1023313_4$

5. 4 a maradék.

6. 0 a maradék.

7. *a)* 234423_5; *b)* 3033332_5; *c)* 133422_5; *d)* 4333204133_5.

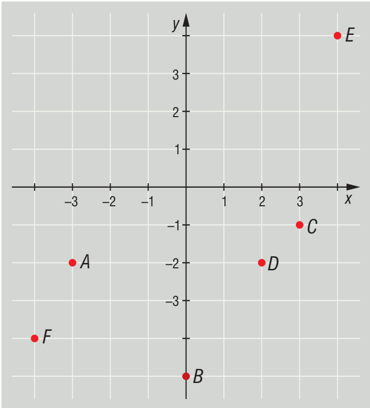
8. 1 kg-tól 40 kg-ig bármekkora tömeget, melynek mérőszáma egész.

Rejtvény: $a = 3$, $b = 4$, $c = 2$.

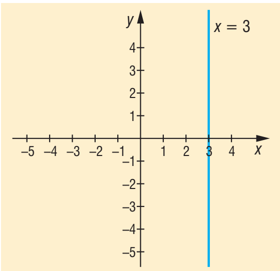
Függvények

1. A derékszögű koordináta-rendszer, ponthalmazok

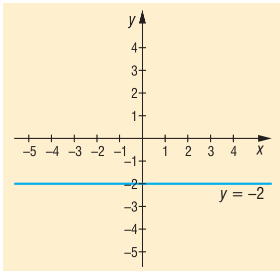
1.



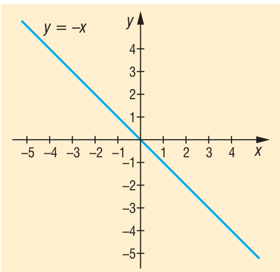
2. *a)*



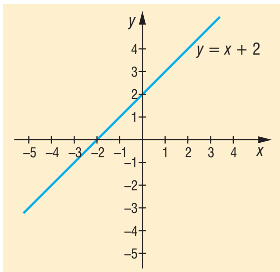
b)



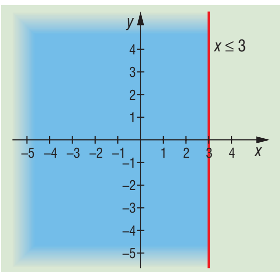
c)



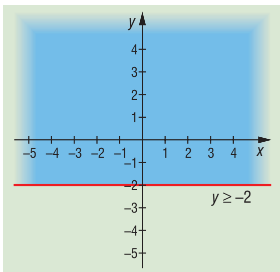
d)



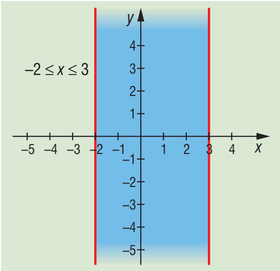
3. *a)*



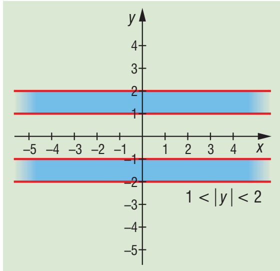
b)



c)

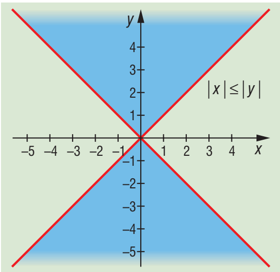


d)

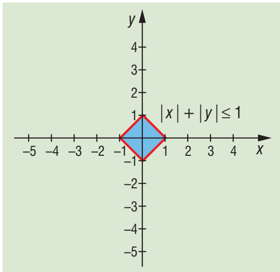


4. *a)* A tengelyek pontjai.

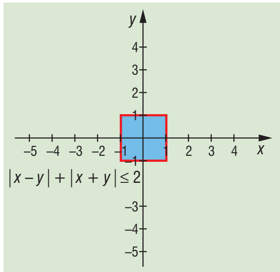
b)



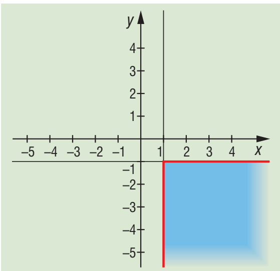
c)



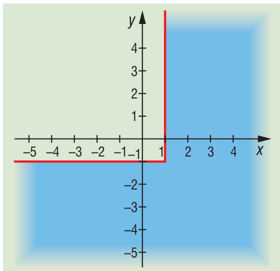
d)



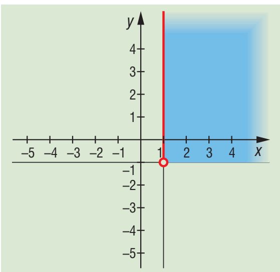
5. *a)*



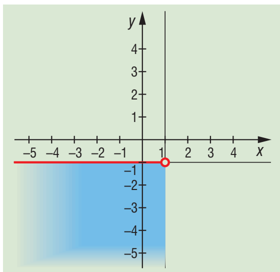
b)



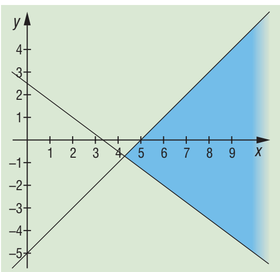
c)



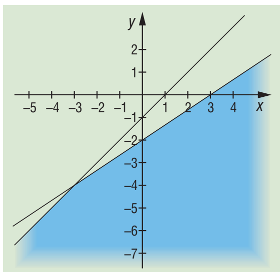
d)



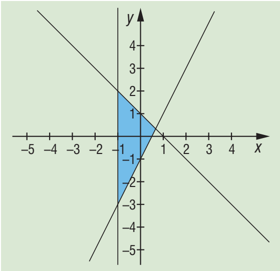
6. *a)*



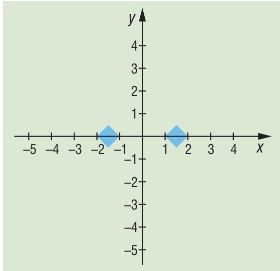
b)



c)



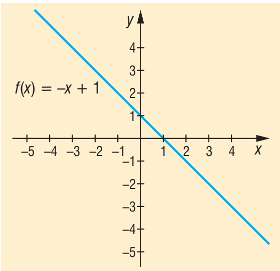
d)



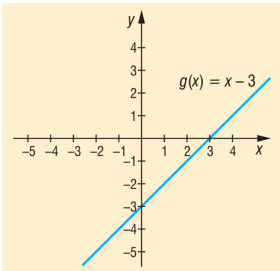
Rejtvény: *a)* 8 s *b)* $\frac{8!}{3!\cdot 5!} = 56$

2. Lineáris függvények

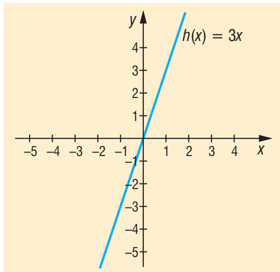
1. *a)*



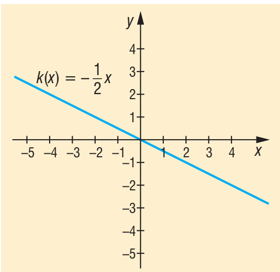
b)



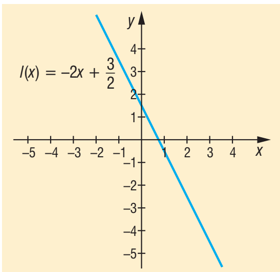
c)



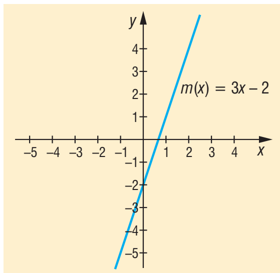
d)



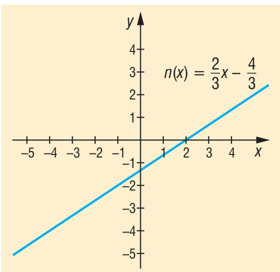
e)



f)



g)



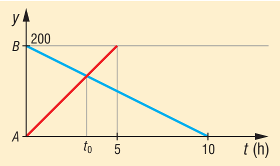
2. *a)* $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2}, \quad \left(0; \frac{1}{2}\right)$ *b)* $f(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}, \quad m = -\frac{1}{3}, \quad \left(0; -\frac{2}{3}\right)$



3. *a)* $P \in f$; $P_1 \notin f$; $P_2 \in f$ *b)* $Q \notin g$; $Q_1 \in g$; $Q_2 \in g$

4. *a)* $R \notin \overline{PQ}$ *b)* $R \in \overline{PQ}$

5.

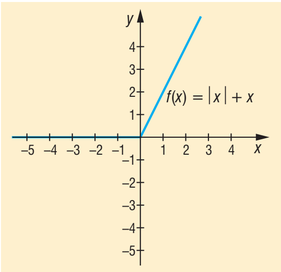


$$40t_0 = 200 - 20t_0$$
$$t_0 = \frac{10}{3}$$

3 óra 20 perc múlva találkoznak.

3. Az abszolútérték-függvény

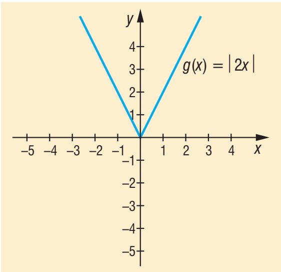
1. *a)*



$$f(x) = \begin{cases} 2x; & \text{ha } x \geq 0 \\ 0; & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

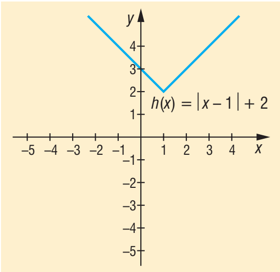
$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = [0; \infty)$
$(-\infty; 0]$ konstans
$[0; \infty)$ szig. mon. növő
max. nincs
min. van, helye $x \in (-\infty; 0]$, értéke: $y = 0$
felülről nem korlátos
alulról korlátos
zérushely: $x \in (-\infty; 0]$

b)



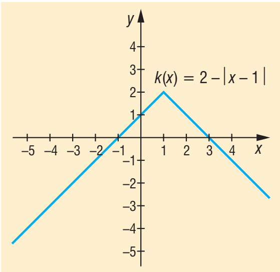
$D_g = \mathbb{R}$
$R_g = [0; \infty)$
$(-\infty; 0]$ szig. mon. csökkenő
$[0; \infty)$ szig. mon. növő
max. nincs
min. van, helye $x = 0$, értéke $y = 0$
felülről nem korlátos
alulról korlátos
zérushely nincs

c)



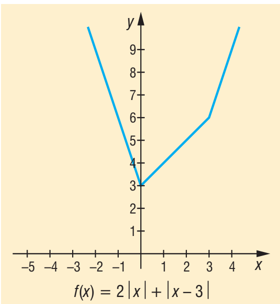
$D_h = \mathbb{R}$
$R_h = [2; \infty)$
$(-\infty; 1]$ szig. mon. csökkenő
$[1; \infty)$ szig. mon. növő
max. nincs
min. van, helye $x = 1$, értéke $y = 2$
felülről nem korlátos
alulról korlátos
zérushely nincs

d)



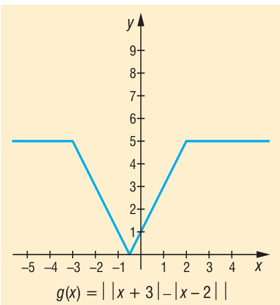
$D_k = \mathbb{R}$
$R_k = (-\infty; 2]$
$(-\infty; 1]$ szig. mon. növő
$[1; \infty)$ szig. mon. csökkenő
max. van, helye $x = 1$, értéke $y = 2$
min. nincs
felülről korlátos
alulról nem korlátos
zérushely: $x = -1$, $x = 3$

2. *a)*



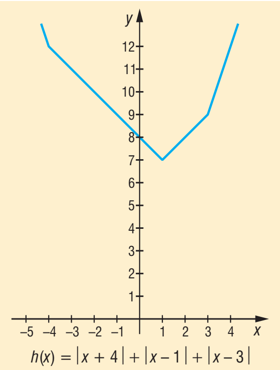
$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = [3; \infty)$
$(-\infty; 0]$ szig. mon. csökkenő
$[0; \infty)$ szig. mon. növő
max. nincs
min. van, helye $x = 0$, értéke $y = 3$
felülről nem korlátos
alulról korlátos
zérushely nincs

b)



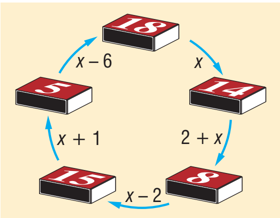
$D_g = \mathbb{R}$
$R_g = [0; \infty)$
$(-\infty; 0]$ szig. mon. csökkenő
$[0; \infty)$ szig. mon. növő
max. nincs
min. van, helye $x = 0$, értéke $y = 0$
felülről nem korlátos
alulról korlátos
zérushely nincs

c)



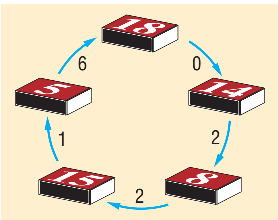
$D_h = \mathbb{R}$
$R_h = [7; \infty)$
$(-\infty; 1]$ szig. mon. csökkenő
$[1; \infty)$ szig. mon. növő
max. nincs
min. van, helye $x = 1$, értéke $y = 7$
felülről nem korlátos
alulról korlátos
zérushely nincs

3. *a)*

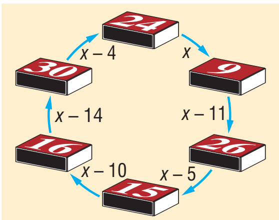


A függvény az
$f(x) = |x| + |2+x| + |x-2| + |x+1| + |x-6|$.
Minimumhelye $x = 0$.

Tehát:

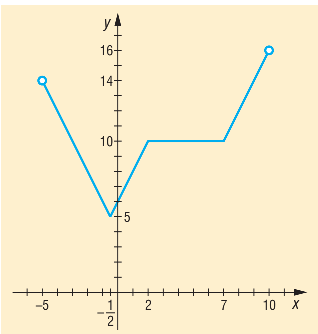


b)



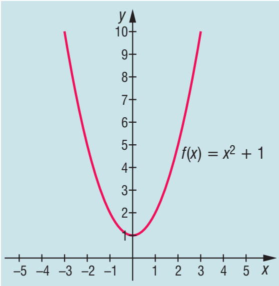
A függvény az
$f(x) = |x| + |x-11| + |x-5| + |x-10| + |x-14| +$
$+ |x-4|$.
Minimumhelye $x \in [5; 10]$.
Így x lehet 5; 6; 7; 8; 9 vagy 10.

4.



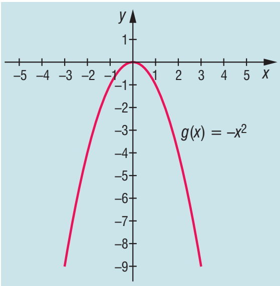
4. A másodfokú függvény

1. *a)*



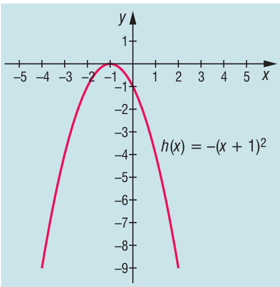
$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = [1; \infty)$
$(-\infty; 0]$ szig. mon. csökkenő
$[0; \infty)$ szig. mon. növő
max. nincs
min. van, helye $x = 0$, értéke $y = 1$
felülről nem korlátos
alulról korlátos
zérushely nincs

b)



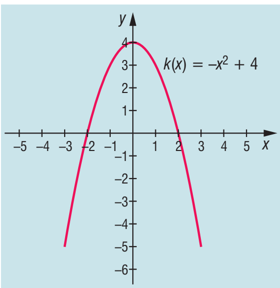
$D_g = \mathbb{R}$
$R_g = (-\infty; 0]$
$(-\infty; 0]$ szig. mon. növő
$[0; \infty)$ szig. mon. csökkenő
max. van, helye $x = 0$, értéke $y = 0$
min. nincs
felülről korlátos
alulról nem korlátos
zérushely: $x = 0$

c)



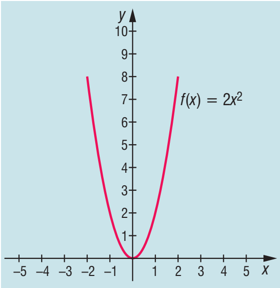
$D_h = \mathbb{R}$
$R_h = (-\infty; 0]$
$(-\infty; -1]$ szig. mon. növő
$[-1; \infty)$ szig. mon. csökkenő
max. van, helye $x = -1$, értéke $y = 0$
min. nincs
felülről korlátos
alulról nem korlátos
zérushely: $x = -1$

d)



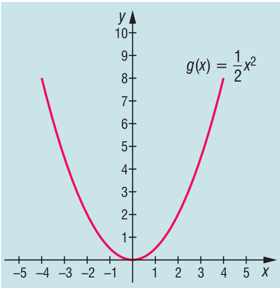
$D_k = \mathbb{R}$
$R_k = (-\infty; 4]$
$(-\infty; 0]$ szig. mon. növő
$[0; \infty)$ szig. mon. csökkenő
max. van, helye $x = 0$, értéke $y = 4$
min. nincs
felülről korlátos
alulról nem korlátos
zérushely: $x = \pm 2$

2. *a)*



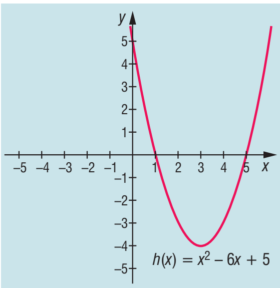
$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = [0; \infty)$
$(-\infty; 0]$ szig. mon. csökkenő
$[0; \infty)$ szig. mon. növő
max. nincs
min. van, helye $x = 0$, értéke $y = 0$
felülről nem korlátos
alulról korlátos
zérushely: $x = 0$

b)



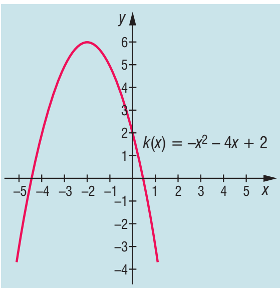
$D_g = \mathbb{R}$
$R_g = [0; \infty)$
$(-\infty; 0]$ szig. mon. csökkenő
$[0; \infty)$ szig. mon. növő
max. nincs
min. van, helye $x = 0$, értéke $y = 0$
felülről nem korlátos
alulról korlátos
zérushely: $x = 0$

c)



$D_h = \mathbb{R}$
$R_h = [-4; \infty)$
$(-\infty; 3]$ szig. mon. csökkenő
$[3; \infty)$ szig. mon. növő
max. nincs
min. van, helye $x = 3$, értéke $y = -4$
felülről nem korlátos
alulról korlátos
zérushely: $x = 1$ vagy $x = 5$

d)



$D_k = \mathbb{R}$
$R_k = (-\infty; 6]$
$(-\infty; 2]$ szig. mon. növő
$[2; \infty)$ szig. mon. csökkenő
max. van, helye $x = -2$, értéke $y = 6$
min. nincs
felülről korlátos
alulról nem korlátos
zérushely: $x = -2 - \sqrt{6}$ vagy $x = -2 + \sqrt{6}$

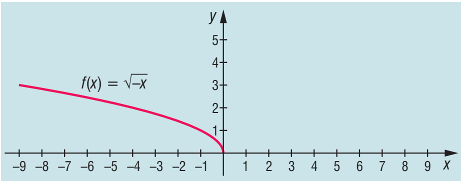
3. A kő röpte h magasságának idő függvénye: $h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$.

Zérushelye: $t = 0$, illetve $t = \frac{2v_0}{g} = 4$.

Tehát 4 s múlva ér földet.
Maximumának helye $t = 2$, értéke $h(2) = 20$.
A kő 20 m magasra repül fel.

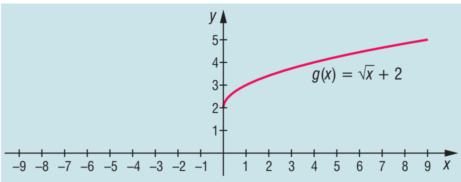
5. A négyzetgyök függvény

1. *a)*



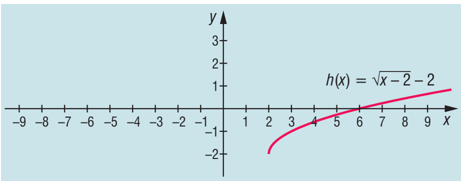
$D_f = (-\infty; 0]$
$R_f = [0; \infty)$
szig. mon. csökkenő
max. nincs
min. van, helye $x = 0$, értéke: $y = 0$
felülről nem korlátos
alulról korlátos
zérushely: $x = 0$

b)



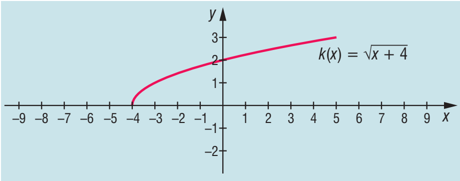
$D_g = [0; \infty)$
$R_g = [2; \infty)$
szig. mon. növő
max. nincs
min. van, helye $x = 0$, értéke $y = 2$
felülről nem korlátos
alulról korlátos
zérushely nincs

c)



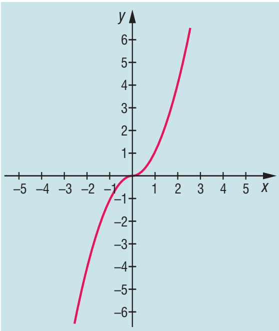
$D_h = [2; \infty)$
$R_h = [-2; \infty)$
szig. mon. növő
max. nincs
min. van, helye $x = 2$, értéke $y = -2$
felülről nem korlátos
alulról korlátos
zérushely: $x = 6$

d)



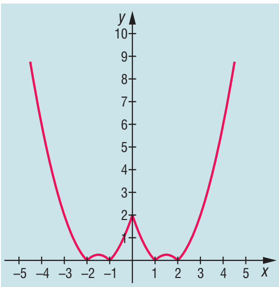
$D_k = [-4; \infty)$
$R_k = [0; \infty)$
szig. mon. növő
max. nincs
min. van, helye $x = -4$, értéke: $y = 0$
felülről nem korlátos
alulról korlátos
zérushely: $x = -4$

2. *a)*



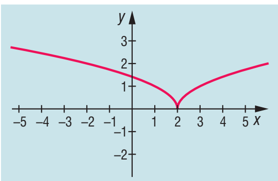
szig. mon. növő
max. nincs
min. nincs

b)



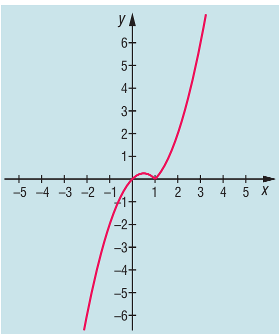
$(-\infty; -2] \cup [-1{,}5; -1] \cup [0; 1] \cup [1{,}5; 2]$ szig. mon. csök.
$[-2; -1{,}5] \cup [-1; 0] \cup [1; 1{,}5] \cup [2; \infty)$ szig. mon. növő
max. nincs
lokális max. van, helye: $x_1 = 0 \quad x_2 = -1{,}5 \quad x_3 = 1{,}5$
értéke: $y_1 = 2 \quad y_2 = \frac{1}{4} \quad y_2 = \frac{1}{4}$
min. van, helye: $x_1 = -2 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 2$
értéke: $y = 0$

c)



$(-\infty; 2]$ szig. mon. csökkenő
$[2; \infty)$ szig. mon. növő
max. nincs
min. van, helye $x = 2$, értéke $y = 0$

d)



$\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; \infty)$ szig. mon. növő

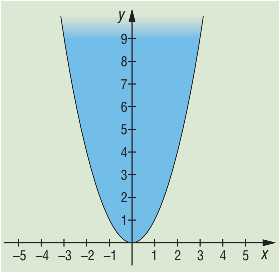
$\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ szig. mon. csökkenő

max., illetve min. nincs

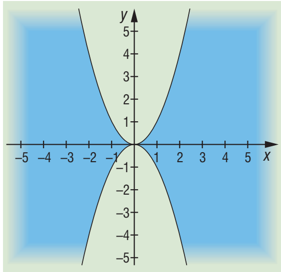
lokális max.: helye $x = \frac{1}{2}$, értéke $y = \frac{1}{4}$

lokális min.: helye $x = 1$, értéke $y = 0$

3. *a)*

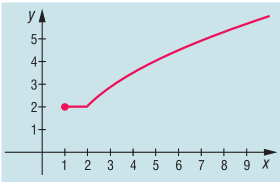


b)



c) ugyanaz, mint *b)*

4.



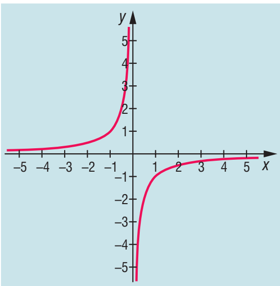
$$f(x)=\begin{cases}2, & \text{ha } 1\le x\le 2\\ 2\sqrt{x-1}, & \text{ha } x>2\end{cases}$$

5. $x = 0{,}6$ $\quad g(0{,}6) = 5$ $\quad$ a maximum helye és értéke

6. Minimum helye $x = 0$, értéke $y=\sqrt{3}$.

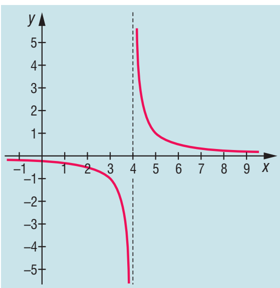
6. Lineáris törtfüggvények

1. *a)*



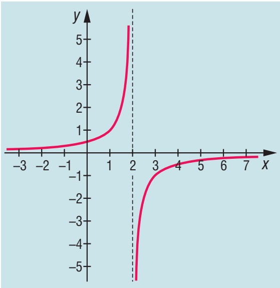
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$(-\infty; 0)$ szig. mon. növő
$(0; \infty)$ szig. mon. növő
max. nincs
min. nincs
felülről nem korlátos
alulról nem korlátos
zérushely nincs

b)



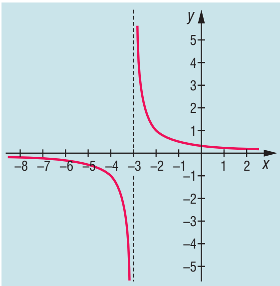
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$
$R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$(-\infty; 4)$ szig. mon. csökkenő
$(4; \infty)$ szig. mon. csökkenő
max. nincs
min. nincs
felülről nem korlátos
alulról nem korlátos
zérushely nincs

c)



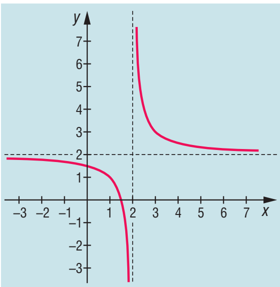
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
$R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$(-\infty; 2)$ szig. mon. növő
$(2; \infty)$ szig. mon. növő
max. nincs
min. nincs
felülről nem korlátos
alulról nem korlátos
zérushely nincs

d)



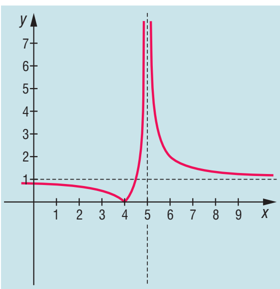
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
$R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$(-\infty; -3)$ szig. mon. csökkenő
$(-3; \infty)$ szig. mon. csökkenő
max. nincs
min. nincs
felülről nem korlátos
alulról nem korlátos
zérushely nincs

2. *a)* $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + 2 \quad x \neq 2$



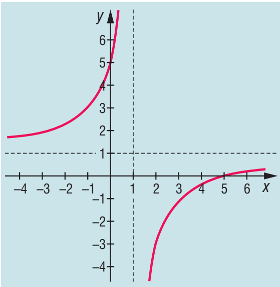
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
$R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$(-\infty; 2)$ szig. mon. csökkenő
$(2; \infty)$ szig. mon. csökkenő
max. nincs
min. nincs
felülről nem korlátos
alulról nem korlátos
zérushely $x = 1{,}5$

b) $g(x) = \left| \dfrac{1}{x-5} + 1 \right| \quad x \neq 5$



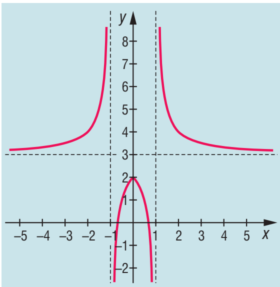
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$
$R_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
$(-\infty; 4]$ szig. mon. csökkenő
$[4; 5)$ szig. mon. növő
$(5; \infty)$ szig. mon. csökkenő
max. nincs
min. van, helye $x = 4$, értéke $y = 0$
felülről nem korlátos
alulról korlátos
zérushely $x = 4$

c) $h(x) = -\dfrac{4}{x-1} + 1 \quad x \neq 1$



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$R_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$(-\infty; 1)$ szig. mon. növő
$(1; \infty)$ szig. mon. növő
max. nincs
min. nincs
felülről nem korlátos
alulról nem korlátos
zérushely $x = 5$

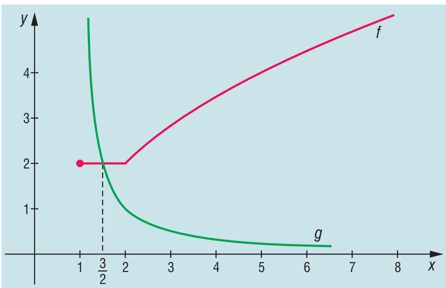
d) $k(x) = \dfrac{1}{|x|-1} + 3 \quad x \neq \pm 1$



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
$R_f = \mathbb{R} \setminus (2; 3]$
$(-\infty; -1)$ szig. mon. növő
$(-1; 0]$ szig. mon. növő
$[0; 1)$ szig. mon. csökkenő
$(1; \infty)$ szig. mon. csökkenő
max. nincs
lokális max. van, helye $x = 0$, értéke $y = 2$
min. nincs
felülről nem korlátos
alulról nem korlátos
zérushely $x = \pm\dfrac{2}{3}$

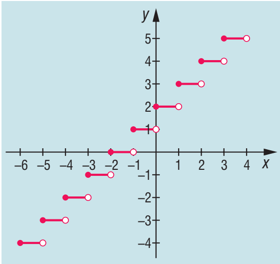
3. *a)* igen *b)* nem *c)* nem *d)* igen

4.



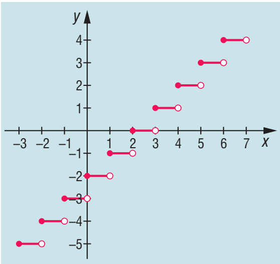
7. Az egészrész, a törtrész és az előjelfüggvény

1. *a)*



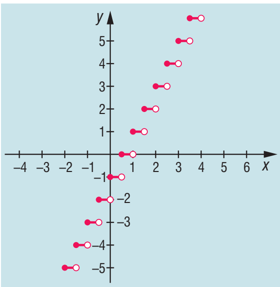
$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = \mathbb{Z}$
mon. növő
max. nincs
min. nincs
felülről nem korlátos
alulról nem korlátos
zérushely van: $x \in [-2; 1)$

b)



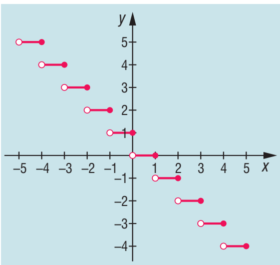
$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = \mathbb{Z}$
mon. növő
max. nincs
min. nincs
felülről nem korlátos
alulról nem korlátos
zérushely van: $x \in [2; 3)$

c)



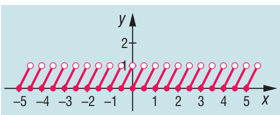
$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = \mathbb{Z}$
mon. növő
max. nincs
min. nincs
felülről nem korlátos
alulról nem korlátos
zérushely van: $x \in [0{,}5; 1)$

d)



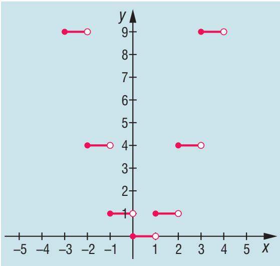
$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = \mathbb{Z}$
mon. csökkenő
max. nincs
min. nincs
felülről nem korlátos
alulról nem korlátos
zérushely van: $x \in (0; 1]$

e)



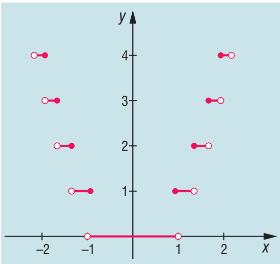
$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = [0;1)$
periodikus, periódusa 0,5
egy perióduson belül szig. mon. növő
max. nincs
min. van, helye $x = 0{,}5k$ ($k \in \mathbb{Z}$), értéke $y = 0$
felülről korlátos
alulról korlátos
zérushely van: $x = 0{,}5k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

2. *a)*



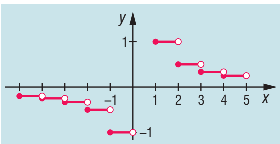
$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = \{x \mid x = k^2,\ k \in \mathbb{Z}^+\}$
$(-\infty; 1)$ mon. csökkenő
$[0; \infty)$ mon. növő
max. nincs
min. van, helye $x \in [0; 1)$, értéke $y = 0$
felülről nem korlátos
alulról korlátos
zérushely van: $x \in [0; 1)$

b)



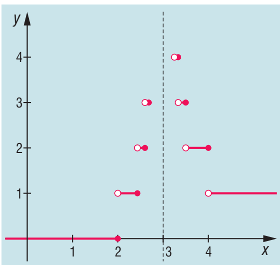
$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$
$(-\infty; 1)$ mon. csökkenő
$(-1; \infty)$ mon. növő
max. nincs
min. van, helye $x \in (-1; 1)$, értéke $y = 0$
felülről nem korlátos
alulról korlátos
zérushely van: $x \in (-1; 1)$

c)



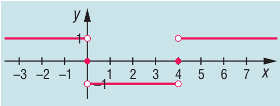
$D_f = \mathbb{R} \setminus [0; 1)$
$R_f = \left\{x \mid x = \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$
$(-\infty; 0)$ mon. csökkenő
$[1; \infty)$ mon. csökkenő
max. van, helye $x \in [1; 2)$, értéke $y = 1$
min. van, helye $x \in [-1; 0)$, értéke $y = -1$
felülről korlátos
alulról korlátos
zérushely nincs

d)

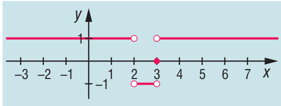


$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
$R_f = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$
$(-\infty; 3)$ mon. növő
$(3; \infty)$ mon. csökkenő
max. nincs
min. van, helye $x \in (-\infty; 2]$, értéke $y = 0$
felülről nem korlátos
alulról korlátos
zérushely van: $x \in (-\infty; 2]$

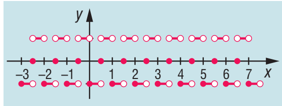
3. *a)*



b)

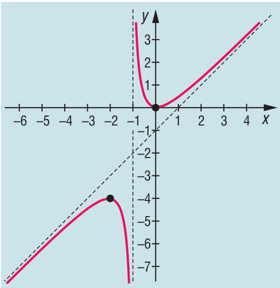


c)



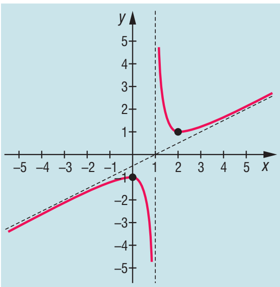
8. További példák függvényekre

1. *a)*



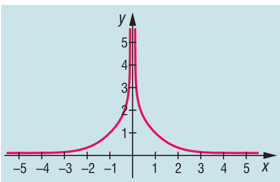
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$R_f = \mathbb{R} \setminus (-4; 0)$
$(-\infty; -2]$ szig. mon. növő
$[-2; -1)$ szig. mon. csökkenő
$(-1; 0]$ szig. mon. csökkenő
$[0; \infty)$ szig. mon. növő
max. nincs
lokális max. van, helye $x = -2$, értéke $y = -4$
min. nincs
lokális min. van, helye: $x = 0$, értéke $y = 0$
felülről nem korlátos
alulról nem korlátos
zérushely van: $x = 0$

b)

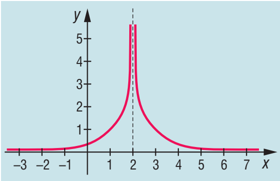


$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$R_f = \mathbb{R} \setminus (-1; 1)$
$(-\infty; 0]$ szig. mon. növő
$[0; 1)$ szig. mon. csökkenő
$(1; 2]$ szig. mon. csökkenő
$[2; \infty)$ szig. mon. növő
max. nincs
lokális max. van, helye: $x = 0$, értéke $y = -1$
min. nincs
lokális min. van, helye: $x = 2$, értéke $y = 1$
felülről nem korlátos
alulról nem korlátos
zérushely nincs

c)



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$R_f = \mathbb{R}^+$
$(-\infty; 0)$ szig. mon. növő
$(0; \infty)$ szig. mon. csökkenő
max. nincs
min. nincs
felülről nem korlátos
alulról korlátos
zérushely nincs

d) 

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$R_f = \mathbb{R}^+$

$(-\infty; 2)$ szig. mon. növő

$(2; \infty)$ szig. mon. csökkenő

max. nincs

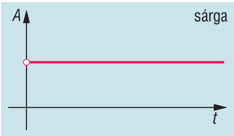
min. nincs

felülről nem korlátos

alulról korlátos

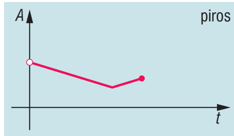
zérushely nincs

Rejtvény:







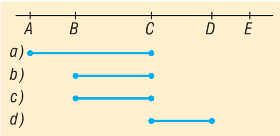




Háromszögek, négyszögek, sokszögek

2. Néhány alapvető geometriai fogalom (emlékeztető)

1.



2. *a)* 4 rész, 2 félegyenes, 2 szakasz
d) $(n+1)$ rész, 2 félegyenes, $(n-1)$ szakasz
b), *c)* a *d)* alapján

3. *a)* 6 *b)* 10 *c)* 21 *d)* $n+1$

4. *a)* 2 *b)* 3 *c)* 4 *d)* 6 *e)* 11

5. *a)* 1 *b)* 10 *c)* 21 *d)* 45 *e)* $\frac{n(n-1)}{2}$

6. *a)* 1 *b)* 6 *c)* 15 *d)* 45 *e)* $\frac{n(n-1)}{2}$

7.

AB	*BC*	*CD*	*AC*	*BD*	*AD*
3 m	5 m	8 m	8 m	13 m	16 m
4 dm	2 dm	1 dm	6 dm	3 dm	7 dm
2 cm	1 cm	6 cm	3 cm	7 cm	9 cm
5 km	6 km	7 km	11 km	13 km	18 km
11 mm	2 mm	2 cm	13 mm	22 mm	0,33 dm

8. *a)* 30º; 150º *b)* 48º; 132º *c)* 53,2º; 126,8º *d)* 60º11'; 119º 49'

9. $180° = 40° + 140°$

10. *a)* $\alpha = 145°$; $\beta = 105°$ *b)* $\alpha = \frac{470°}{3}$; $\beta = \frac{280°}{3}$ *c)* $\alpha = \frac{400°}{3}$; $\beta = \frac{350°}{3}$

11. –30º

5. Összefüggés a derékszögű háromszög oldalai között

1. *a)* 90º; 150º; 120º; 90º *b)* 60º; 135º; 105º; 120º
c) 72º; 98º; 154º; 108º *d)* 80º; 90º; 170º; 100º
e) 41,9º; 156,5º; 65,4º; 138,1º *f)* 1º; 92º; 89º; 179º

2. *a)* $\gamma = 65°$; $\alpha' = 145°$; $\beta' = 100°$; $\gamma' = 115°$ *b)* $\beta = 67°$; $\gamma = 57°$; $\alpha' = 124°$; $\gamma' = 123°$
c) $\alpha = 85°$; $\beta = 45°$; $\beta' = 135°$; $\gamma' = 130°$ *d)* $\beta = 98°$; $\gamma = 38°$; $\alpha = 44°$; $\alpha' = 136°$
e) $\alpha' = 190°$ nem lehetséges *f)* $\alpha = 88°$; $\gamma = 155°$ ez nem lehetséges

3. *a)* 30º; 60º; 90º; 150º; 120º; 90º *b)* 48º; 60º; 72º; 132º; 120º; 108º
c) 27º; 63º; 90º; 153º; 117º; 90º *d)* 15º; 67,5º; 97,5º; 165º; 112,5º; 82,5º
e) 35º; 50º; 95º; 145º; 130º; 85º *f)* 55º; 60º; 65º; 125º; 120º; 115º

4. 38º; 60º; 82º; 142º; 120º; 98º

5. *a)* van *b)* van *c)* van *d)* nincs

6. *a)* 4; 3; 2 *b)* 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1
c) 84; 83; ...; 21 *d)* 163; ...; 1

7. *a)* 4 cm; a szárszög a kisebb.
b) 3 dm; a szárszög a nagyobb, vagy 3 cm és a szárszög a nagyobb, vagy 5 cm és az alapon fekvő szög a nagyobb.
c) A harmadik oldal (c) lehetséges értéke 0 m < c < 8 m.
Ha 4 m < c < 8 m, akkor a szárszög a nagyobb;
ha c = 4 m, akkor a szögek egyenlőek;
ha 0 m < c < 4 m, akkor az alapon fekvő szög a nagyobb.
d) 18 mm, szárszög a kisebb

8. Szabályos háromszög 6 db, egyenlő szárú 23 db, általános 15 db, összesen 44 db háromszög szerkeszthető.

9. *a)* b *b)* b *c)* $b = c$ *d)* b *e)* nem háromszög *f)* c

10. Tudjuk $a = b$.

$$\frac{a+b+c}{2} \overset{?}{<} a+c \quad\Updownarrow\quad a+\frac{c}{2} \overset{?}{<} a+c \quad \text{ez igaz}$$

$$a+c \overset{?}{<} \frac{3}{4}(a+b+c) \quad\Updownarrow\quad 4a+4c \overset{?}{<} 6a+3c \quad\Updownarrow\quad c \overset{?}{<} 2a \quad \text{ez igaz}$$

Ezzel az állítást beláttuk.

11.

a	3 cm	5 dm	4 m
b	4 cm	12 dm	7 m
c	5 cm	13 dm	$\sqrt{65}$

6. A négyszögekről (emlékeztető)

1. *a)* $\gamma = 96°$; $\delta = 92°$; $\alpha' = 80°$; $\beta' = 108°$; $\delta' = 88°$
b) $\gamma = 72°$; $\delta = 83°$; $\alpha' = 110°$; $\beta' = 45°$; $\delta' = 97°$
c) $\beta < 157°$; $\gamma = 157° - \beta$; $\beta' > 23°$; $\gamma' = \beta + 23°$; $\delta' = 59°$
d) $\beta = 92°$; $\delta = 10°$; $\gamma = 122°$; $\alpha' = 44°$; $\gamma' = 58°$

2. *a)* 90°, 90°; 120°, 60°, 90°, 90°
b) 107,5°, 107,5°; 135°, 80°, 72,5°, 72,5°
c) 92,25°, 92,25°; 17,5°, 167°, 87,75°, 87,75°
d) $\alpha < 198°$, $\beta = 198° - \alpha$; 99°, 99°, $180° - \alpha$, $\alpha - 18°$

3. *a)* Nem lehet trapéz.
b) $4\frac{180°}{17}$; $7\frac{180°}{17}$; $10\frac{180°}{17}$; $13\frac{180°}{17}$
c) 45°; 75°; 105°; 135°
d) nem lehet trapéz

4. *a)* 30°; 150° *b)* 127°; 53° *c)* 129°; 51° *d)* 143,2°; 36,8°

5. *a)* 45°; 135° *b)* 80°; 100° *c)* 75°; 105° *d)* $\frac{a \cdot 180°}{a+b}$; $\frac{b \cdot 180°}{a+b}$

6. *a)* 30°; 150° *b)* 57°; 123° *c)* 83°; 97° *d)* 174°; 6°

7. *a)* 98,5° *b)* 90,5° *c)* 134° *d)* 31°

8. *a)* 78° vagy 162° *b)* 139° vagy 53° *c)* 104° *d)* 133° vagy 122°

9. *a)* 60° *b)* 22° *c)* 77,2° *d)* 2α

10. $\alpha + \beta = 360° - (\gamma + \delta) = 360° - (180° - \gamma' + 180° - \delta') = \gamma' + \delta'$

11. *a)* hamis *b)* hamis *c)* igaz *d)* igaz *e)* hamis *f)* hamis
g) igaz *h)* igaz *i)* igaz *j)* igaz *k)* hamis

7. A sokszögekről

1. *a)* 5 *b)* 14 *c)* 20 *d)* 54° *e)* 377

2. *a)* 540° *b)* 900° *c)* 1080° *d)* 1800° *e)* 4860°

3. *a)* 108° *b)* $\frac{900°}{7}$ *c)* 135° *d)* 150° *e)* $\frac{4860°}{29}$

4. *a)* 8 *b)* 10 *c)* 16 *d)* 21 *e)* 33

5. *a)* 5 *b)* 7 *c)* 11 *d)* 19

6. *a)* 5 *b)* 20 *c)* 54 *d)* 230

7. A külső és belső szögek összege $n \cdot 180°$. Ebből a belső szögek összege $(n-2) \cdot 180°$. Így a külső szögek összege a kettő különbsége, azaz 360°.

8. *a)* 6 *b)* 10 *c)* 17 *d)* 36

9. *a)* 120º; 60º *b)* 144º; 36º *c)* 157,5º; 22,5º *d)* $\frac{1140^\circ}{7}$; $\frac{120^\circ}{7}$

10. *a)* 3 *b)* 5 *c)* 9 *d)* 16

11. *a)* 4 *b)* 5 *c)* 7 *d)* 9

12. $5 \cdot 36^\circ + 5 \cdot 252^\circ = 5 \cdot 288^\circ = 1440^\circ$

8. Nevezetes ponthalmazok

1. 90º

2. A húrt felező átmérő két végpontja.

3. A keresett pontok az *AB* szakasz felező merőlegesének és a körnek a metszéspontjai. Lehet 2, 1 vagy 0 ilyen pont.

4. *a)* Az *AB* felező merőlegese által meghatározott azon félsík, amely *A*-t tartalmazza.
b) Az a félsík, amely *B*-t tartalmazza (a határegyenes nélkül).

5. A középpont a szögtartományban a száraktól 2 cm-re lévő, velük párhuzamos két egyenes metszéspontja.

6. Mindkét szárhoz létezik egy ilyen kör.

7. Mivel a szögfelezők az oldalakkal 45º-os szöget zárnak be, egymásra a metszőek merőlegesek, a szemköztiek párhuzamosak. Így egy téglalapot határoznak meg.

8. *a)* A keresett körök középpontjai az *A* és *B* középpontú, 4 cm sugarú körök metszéspontjai. 2 megoldás van.
b) A keresett középpontok az *A* és *B* középpontú, 5 cm sugarú körök metszéspontjai és az *A* középpontú 1 cm / 5 cm, illetve *B* középpontú 5 cm / 1 cm sugarú körök metszéspontjai. 4 megoldás van.
c) A keresett középpontok az *A* és *B* középpontú, 6 cm sugarú körök metszéspontjai és az *A* középpontú 2 cm / 6 cm, illetve *B* középpontú 6 cm / 2 cm sugarú körök metszéspontjai. 6 megoldás van.

9. $|x| = |y|$

10. Egy pontban metszik egymást.

11. Egy pontban metszik egymást.

Rejtvény: Az egyik pont mint középpont körül a másik ponton keresztül rajzolunk egy kört, majd ugyanezen távolsággal a kerületen lévő pontból kiindulva a körön felmérünk 6 pontot. Ezek szabályos hatszöget alkotnak, és bármely két szemközti pontnak a távolsága az eredeti két pont távolságának kétszerese.

9. A háromszög beírt köre

1. *a)* 60º; 60º; 60º *b)* 74º; 74º; 32º *c)* 84º; 84º; 12º *d)* 20º; 20; 140º

4. *a)* 50 cm^2. *b)* $\dfrac{85}{4}\ \text{cm}^2 = 21{,}25\ \text{cm}^2$.

c) 16,4 cm^2. *d)* 164,22 cm^2.

10. A háromszög köré írt kör

2. *a)* Megrajzoljuk a kört, és abban felveszünk egy, az alappal megegyező hosszúságú húrt. A húr felező merőlegese metszi ki a körből a keresett csúcsot. Két megoldás van, ha az alap nem nagyobb a sugár kétszeresénél.

b) A kör kerületének egy pontjából körzőzünk a szár hosszával. Ez két pontban metszi a kört, ezek a háromszög keresett csúcsai. Egy megoldás van, ha a szár hossza kisebb mint a sugár kétszerese.

11. Thalész tétele és néhány alkalmazása

1. *d)* $\sqrt{100-a^2}$ cm a befogó, az átfogó 10 cm.

2. *a)* 3 cm *b)* $\sqrt{33}$ cm *c)* $8\sqrt{2}$ cm *d)* $\sqrt{513}$ cm

3. A két talppont illeszkedik a harmadik oldal Thalész-körére.

4. A két talppont által meghatározott szakasz felező merőlegese metszi ki az oldalegyenesből a harmadik oldalhoz tartozó Thalész-kör középpontját. Ezen középpontból a két talpponton keresztül körzőzünk, mely kör az oldalegyenesből kimetszi az oldal két végpontját. A talppontok és a végpontok határozzák meg a keresett háromszög oldalait. Két megoldás van, ha a pontok az egyenes egyik oldalán vannak, és egyenesük nem merőleges az egyenesre.

5. A kör az alapot a felezőpontjában metszi, mivel innen a szár derékszögben látszik, és így ez az alaphoz tartozó magasság talppontja.

6. Vegyük fel az átfogót, majd szerkesszünk egy vele párhuzamos egyenest magasság távolságnyira. Ebből a párhuzamos egyenesből az átfogó Thalész-köre kimetszi a háromszög harmadik csúcsát. Ha a magasság nagyobb, mint az átfogó fele, akkor nincs megoldás; ha egyenlő vele, akkor egy egyenlő szárú háromszög a megoldás; ha kisebb, akkor két egybevágó háromszöget kapunk.

7. A körök a harmadik oldalhoz tartozó magaság talppontjában metszik ezt az oldalt.

8. *a)* 4 cm; 1 cm *b)* 12 cm; 2 cm *c)* 6 cm; 2 cm *d)* $\sqrt{663}$; $\dfrac{\sqrt{663}-17}{2}$

Rejtvény: $K = 12$.

12. Érintőnégyszögek, érintősokszögek

1. Ha érintőnégyszög, akkor a szemközti oldalak összege egyenlő, azaz az oldalai egyenlőek, azaz rombusz.

2. A belső szögfelezők a beírt kör középpontjában metszik egymást, mivel ez az a pont, mely minden szögszártól egyenlő távolságra van.

3. *a)* Felveszünk egy oldalhosszúságú szakaszt, majd párhuzamost szerkesztünk vele kétszeres sugár távolságra. Az oldal két végpontjából oldalhosszúságú sugárral körzőzünk, így 4 pontot kapunk. Ezeket megfelelően összekötve az oldal végpontjaival, két egybevágó rombuszt kapunk.

b) Felvesszük a beírt kört, majd egy szakaszt, melynek felezőpontja a kör középpontja, hossza pedig az átlóval egyenlő. Az átló két végpontjából a körhöz érintőket szerkesztve megkapjuk a rombuszt.

4. Vegyünk fel a beírt kör átmérőjével egyenlő hosszúságú szakaszt, majd mindkét végpontjában állítsunk rá két merőleges félegyenest azonos irányban. A derékszögek szögfelezői kimetszik a beírható kör középpontját. Rajzoljuk meg a kört. Az egyik félegyenesre mérjük fel az alap hosszát a derékszögű csúcsból, majd az új végpontból szerkesszünk érintőt a beírt körhöz. Ez a másik párhuzamos félegyenesből kimetszi a trapéz negyedik csúcsát.

5. Vegyünk fel egy derékszöget, majd szerkesszünk egy olyan négyzetet, amelynek egyik csúcsa a derékszög csúcsa, oldalhosszúsága pedig egyenlő a beírt kör sugarával. A nem a derékszögű szárakra illeszkedő csúcs lesz a beírt kör középpontja. Az adott derékszög egyik szárára mérjük fel az adott oldalt a csúcsból, majd rajzoljuk meg az így kapott végpont és kör középpontja által meghatározott egyenest. Erre tükrözve a derékszöget megkapjuk a deltoidot.

6. *a)* 6 cm vagy 5 cm vagy 7 cm. *b)* 34 cm vagy 42 cm.

7. A beírt kör középpontját a csúcsokkal összekötve olyan háromszögekre bontjuk a négyszöget, melyek magassága a beírt kör sugara. A háromszögek területeinek összege adja a négyszög területét

$$T = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2} = \frac{K \cdot r}{2}.$$

Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

1. Az egyenlet, azonosság fogalma

1. *a)* állítás *b)* állítás, igaz *c)* állítás, igaz *d)* nem állítás
e) állítás, hamis *f)* nem állítás *g)* nem állítás

2. *a)* Igaz, ha x téglalap. *b)* Igaz, ha $c = 0$.
c) Igaz, ha $x = 12l$, $l \in \mathbb{Z}^+$. *d)* Igaz, ha $y = 1; 2; 3; 4; 6; 12$.
e) Igaz, ha $x = 9$. *f)* Igaz, ha $n = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$.

3. *a)* $x = 2x + 2$ *b)* $x = 3x - 3$ *c)* $2(x + 10) = 3x$
d) $3x - 7 = 2x + 5$ *e)* $6x + 6 = 42$

4. *a)* $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ *b)* $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ *c)* $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ *d)* $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$
e) $\mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{3}{4}\right\}$ *f)* $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ *g)* $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ *h)* $\mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{3}{5}\right\}$

5. *a)* Azonosság, ha $a = 3$, az $x = 0$ mindig megoldás.
b) Azonosság, ha $a = -14$, nincs megoldás, ha $a \neq -14$.
c) Azonosság, ha $a = -4$, mindig van megoldás.
d) Azonosság, ha $a = 1$, a 0 mindig megoldás.

6. *a)* $x = 1$ *b)* $x = 1$ *c)* $x = 3$

Rejtvény: A negyedik állítás igaz csak.

2. Az egyenletek megoldásának grafikus módszere

1. *a)* $x = \frac{1}{2}$ *b)* $x = -\frac{3}{2}$ *c)* $x = \frac{3}{5}$ vagy $x = 1$ *d)* $x \geq \frac{2}{3}$

2. $|x| = x + 1$

$x = -\frac{1}{2}$

3. Nincs.

4. $2 - \frac{1}{x} = x$

$x = 1$

3. Az egyenlet értelmezési tartományának és értékkészletének vizsgálata

1. *a)* nincs megoldás *b)* nincs megoldás *c)* nincs megoldás *d)* nincs megoldás

2. *a)* $a < 7$ *b)* $a < 3$ *c)* $a < -2$ *d)* $a < 0$

3. *a)* $x = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{4}$ *b)* $x = \frac{4}{3}$; $y = 2$ *c)* $x = -2$; $y = \frac{4}{3}$

d) $x = 2$; $y = \frac{4}{5}$ *e)* $x = 2$ *f)* $x = 2$; $y = -2$; $z = 1$

Rejtvény: A szorzat 0, mivel a 77. tényező 0, az összeg 0.

4. Egyenlet megoldása szorzattá alakítással

1. –3; –2; –1; 0 vagy –2; –1; 0; 1 vagy –1; 0; 1; 2 vagy 0; 1; 2; 3

2. *a)* $x_1 = 4$; $x_2 = -2$; $x_3 = \frac{1}{2}$; $x_4 = -4$

b) $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = \frac{5}{4}$

c) $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{3}{2}$; $x_3 = \frac{8}{3}$

d) $x = \frac{4}{5}$

e) $x_1 = 4$; $x_2 = -\frac{18}{5}$

f) $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{53}{20}$

g) $x_1 = 0$; $x_2 = 12$; $x_3 = \frac{13}{8}$

h) $x_1 = \frac{4}{5}$; $x_2 = -\frac{11}{24}$

3. *a)* $x_1 = \frac{7}{9}$; $x_2 = -2$ *b)* $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{51}{28}$

c) $x_1 = \frac{6}{5}$; $x_2 = -\frac{3}{2}$ *d)* $x_1 = -4$; $x_2 = -1$

Rejtvény: A második lépésnél 0-val egyszerűsített, ami nem ekvivalens átalakítás.

5. Megoldás lebontogatással, mérleg-elvvel

1. *a)* $x = -\frac{1}{4}$ *b)* $y = -\frac{1}{5}$ *c)* $z = \frac{135}{59}$ *d)* $v = \frac{7}{8}$

2. *a)* $x = -1$ *b)* $y = -\frac{1}{7}$ *c)* $z = 12$ *d)* $v = 0$

6. Egyenlőtlenségek

1. *a)* $x < 4$ *b)* $x \geq \frac{4}{3}$ *c)* $-4 \leq x \leq 1$ *d)* $-\frac{2}{3} \leq x \leq 2$

2. *a)* $x > 3$ *b)* $x < 2$ *c)* $x < -\frac{3}{7}$ *d)* $x \leq \frac{17}{18}$

3. *a)* $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ *b)* $x \leq -\frac{1}{2}$ vagy $1 \leq x \leq 2$

c) $x < -2$ vagy $\frac{3}{2} < x < 2$ *d)* $x < -2$ vagy $\frac{3}{2} < x < 2$ vagy $3 < x$

4. *a)* $-1 < x \leq 1$ *b)* $x > -1$ *c)* $x \leq -2$ vagy $-1 < x \leq 1$

5. *a)* $x < -1$ vagy $-\frac{1}{2} < x < 0$ *b)* $-1 < x \leq \frac{1}{5}$ vagy $1 < x$

c) $x < -3$ vagy $-2 < x < 0$ vagy $1 < x$

7. Abszolútértéket tartalmazó egyenletek, egyenlőtlenségek

1. *a)* $x_1 = -3;\ x_2 = 3$ *b)* $x_1 = 3;\ x_2 = -1$

c) $-3 < x < 3$ *d)* $x < -1$ vagy $3 < x$

2. *a)* $x = -\frac{1}{3}$ *b)* $x_1 = 0;\ x_2 = 4$

c) $x \in \mathbb{R}$ *d)* $x = \frac{1}{2}$

3. *a)* $x \in \mathbb{R}$ *b)* nincs megoldás

c) $x < 0$ *d)* $x \leq \frac{5}{3}$ vagy $3 \leq x$

4. *a)* $-1 \leq x \leq 1$ *b)* $x_1 = -2;\ x_2 = -1$

c) $x_1 = -6;\ x_2 = 6$ *d)* $x_1 = -5;\ x_2 = -3;\ x_3 = 5;\ x_4 = 7$

5. *a)* nincs megoldás

b) $x \le -\frac{1}{2}$ vagy $\frac{3}{2} \le x$

c) $-6 < x < 6$

d) $x \le -5$ vagy $-3 \le x \le 5$ vagy $7 \le x$

8. Paraméteres egyenletek

1. *a)* $a = 0$: $x \in \mathbb{R}$

$a \ne 0$: $x = 1$

b) $b = 1$: $\varnothing$

$b \ne 1$: $x = \frac{b}{b-1}$

c) $a = 0$ és $b = -1$: $x \in \mathbb{R}$

$a = 0$ és $b \ne -1$: $\varnothing$

$a \ne 0$: $x = \frac{b+1}{a}$

d) $a = 0$: $x \in \mathbb{R}$

$a \ne 0$: $x = a$

2. *a)* $a = -1$: $x \in \mathbb{R}$

$a \ne -1$: $x = a - 1$

b) $a = 1$: $x \in \mathbb{R}$

$a \ne 1$: $x = \frac{1}{a-1}$

c) $b = 0$: $\varnothing$

$b = 1$: $x \in \mathbb{R}$

$b \ne 0; 1$: $x = \frac{1}{b}$

d) $a = 0$: $\varnothing$

$a = 1$: $\varnothing$

$a \ne 0; 1$: $x = \frac{2-a}{a(a-1)}$

3. *a)* $v = \frac{s}{t}$, $t \ne 0$

$t = \frac{s}{v}$, $v \ne 0$

b) $p = \frac{F}{A}$, $A \ne 0$

$A = \frac{F}{p}$, $p \ne 0$

c) $I = \frac{U}{R}$, $R \ne 0$

$R = \frac{U}{I}$, $I \ne 0$

d) $P = \frac{W}{t}$, $t \ne 0$

$t = \frac{W}{P}$, $P \ne 0$

4. $a = b = 0$: nem értelmezhető

$a \ne 0$ és $b \ne 0$: $b = 2a$: $\varnothing$

$b \ne 2a$: $x = \frac{ab}{b-2a}$

5. *a)* Nem lesz zérus.

b) $b > 2a > 0$; $a > 0$ és $b < 0$; $0 > b > 2a$

c) $2a > b > 0$; $0 > 2a > b$; $b > 0$ és $a < 0$

9. Egyenletekkel megoldható feladatok I.

1. x: a kerékpártúra hossza km-ben

$$\frac{x}{4}+6+\left(\frac{3x}{4}-6\right)\cdot\frac{1}{3}+2+44=x$$
$$x=100$$

100 km hosszú volt a kerékpártúra.

2. A 3 testvér életkora legyen x, y, z $(x<y<z)$.

$$\begin{aligned} x+y+z&=40\\ y&=x+3\\ y&=z-4 \end{aligned}$$
$$x=10;\ \ y=13;\ \ z=17$$

A testvérek 10, 13 és 17 évesek.

3. x: az apa kora

$$x+(x-8)=60$$
$$x=34$$

34 éves az apa.

4. x: a gondolt szám

$$2(x+4)-8=x$$
$$x=0$$

5. x: az egyesek helyén álló számjegy

$$(3x-1)\cdot 10+x=10x+(3x-1)+27$$
$$x=2$$

A szám az 52.

6. x: összesen annyi forintja volt

$$\begin{aligned} 3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}05+x\cdot 0{,}15\cdot 0{,}03+x\cdot 0{,}05\cdot 0{,}02&=36\,400\\ x\cdot 0{,}05\cdot 0{,}91&=36\,400\\ x&=800\,000 \end{aligned}$$

800 000 forintja volt összesen.

Rejtvény: e: az erdőben lévő fák mennyisége, f: a kivágandó fenyőfák mennyisége

$$e\cdot 0{,}99-f=(e-f)\cdot 0{,}98$$
$$e=2f$$

Az erdő felét ki akarják vágni.

10. Egyenletekkel megoldható feladatok II.

1. a: az elvégzendő munka mennyisége

Az egyik munkás teljesítménye $\frac{a}{24}$, a másiké $\frac{a}{30}$.

Közös teljesítményük $\frac{a}{24}+\frac{a}{30}$.

A közös munkához szükséges idő $\frac{a}{\frac{a}{24}+\frac{a}{30}}=\frac{40}{3}$.

13 óra 20 perc alatt végeznek együtt.

2. a: a kád űrtartalma

Az egyik csap teljesítménye $\frac{a}{20}$, a másiké $\frac{a}{15}$ és a lefolyóé $\frac{a}{16}$.

Együttes teljesítményük $\frac{a}{20}+\frac{a}{15}-\frac{a}{16}$.

A feltöltéshez szükséges idő $\frac{a}{\frac{a}{20}+\frac{a}{15}-\frac{a}{16}}=\frac{240}{13}=18+\frac{6}{13}$.

Körülbelül 18 óra 28 perc alatt telik meg.

3. x: a kikötők távolsága

y: a hajó sebessége állóvízben

$$y+3=\frac{2x}{7}$$
$$y-3=\frac{x}{5}$$
$$x=70;\ \ y=17$$

70 km a kikötők távolsága.

4. x: az agár által megtett út

A sebessége 3 m, az agáré 4m időegységenként.

$$\frac{x-30}{3}=\frac{x}{4}$$
$$x=120$$

120 métert kell megtennie.

5. x: az elpárologtatott víz mennyisége

$$10\cdot 0{,}4=(10-x)\cdot 0{,}6$$
$$x=\frac{10}{3}$$

$\frac{10}{3}$ l vizet kell elpárologtatni.

6. x: az eredeti ár

$$x \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}2 = x - 100$$
$$x = 2500$$

2500 forintba került.

Rejtvény:

a)	3 tyúk	3 nap alatt	3 tojás,
	9 tyúk	3 nap alatt	9 tojás,
	9 tyúk	9 nap alatt	27 tojás.
b)	1 tyúk	1 nap alatt	$\frac{1}{3}$ tojás,
	5 tyúk	1 nap alatt	$\frac{5}{3}$ tojás,
	5 tyúk	6 nap alatt	10 tojás.
c)	1 tyúk	1 nap alatt	$\frac{1}{3}$ tojás,
	1 tyúk	9 nap alatt	3 tojás,
	7 tyúk	9 nap alatt	21 tojás.

11. Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszerek

1. *a)* (1; 3) *b)* (4; 2) *c)* (1; 1)

2. *a)* (1; –1) *b)* $\left(\frac{24}{25}; \frac{16}{5}\right)$ *c)* $\left(\frac{5}{2}; -1\right)$

3. *a)* $\left(\frac{5}{6}; -\frac{3}{2}\right)$ *b)* $\left(\frac{7}{13}; \frac{4}{13}\right)$ *c)* $\left(\frac{26}{5}; -\frac{1}{5}\right)$

4. *a)* $a \neq -4$ *b)* nincs ilyen a *c)* $a = -4$

5. *a)* $a = -b$ és $b \neq \frac{2}{3}$ *b)* $a = -b = -\frac{2}{3}$

Rejtvény: Mindkét egyenlet egy-egy egyenest határoz meg a koordinátasíkon. Ha a értékét „kicsit" változtatjuk, akkor a hozzá tartozó egyenes meredeksége „kicsit" változik, de az y tengelyen vett metszéspont nem. Így a két egyenes metszéspontja, azaz az egyenletrendszer megoldása „kicsit" fog változni. Az állítás tehát igaz.

12. Egyenletrendszerekkel megoldható feladatok

1. $\dfrac{18\cdot 0,46+12\cdot 0,54}{30}=0,492$

Akárhogy keverjük őket össze, 49,2%-os oldatunk lesz.

2. x: a villamos sebessége $\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$-ban mérve

y: a villamos követési ideje órában mérve

Egy irányban haladva két találkozás között a második villamosnak meg kell tannie a két villamos közötti távolságot $(x\cdot y)$ és az ember által megtett utat. Ha szembe mennek, akkor az ember által megtett úttal kevesebbet kell megtennie. tehát

$$\left.\begin{aligned} x\cdot\frac{1}{5}&=x\cdot y+4\cdot\frac{1}{5}\\ x\cdot\frac{1}{15}&=x\cdot y+4\cdot\frac{1}{15}\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=8\ \frac{\text{km}}{\text{h}};\ \ y=\frac{1}{10}\ \text{h}=6\ \text{min.}$$

3. x: a tízes helyi értéken álló számjegy

y: az egyes helyi értéken álló számjegy

$$\begin{aligned}10x+y&=4(10y+x)+3\ \ \rightarrow\ \ x>y\\ 10x+y&=11(x-y)+5\\ \hline x&=7;\ \ y=1\end{aligned}$$

A szám a 71.

4. Legyen $\alpha=\dfrac{\beta+\gamma}{2}$. Ekkor α nagyobb az egyik szögnél és kisebb a másiknál. Tegyük fel, hogy $\beta<\alpha<\gamma$. Így

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{\beta+\gamma}{2}\\ \alpha+\gamma&=3\beta\\ \alpha+\beta+\gamma&=180^\circ\\ \hline \alpha=60^\circ;\ \ \beta&=45^\circ;\ \ \gamma=75^\circ\end{aligned}$$

13. Lineáris többismeretlenes egyenletrendszerek

1. *a)* $(-11;-6;-8)$ *b)* $(1;0;0)$ *c)* $\left(\dfrac{29}{37};\dfrac{49}{37};\dfrac{73}{37}\right)$

2. Nemnegatív tagok összege csak akkor 0, ha minden tag 0.

a) $(8;5;3)$ *b)* $\left(\dfrac{35}{26};\dfrac{36}{13};\dfrac{233}{52}\right)$ *c)* $(2;3;1)$

3. x: vízszintes útszakasz hossza
y: emelkedő hossza oda felé
z: lejtő hossza oda felé

$$\frac{x}{80}+\frac{y}{60}+\frac{z}{100}=5$$
$$\frac{x}{80}+\frac{z}{60}+\frac{y}{100}=\frac{79}{15}$$
$$x+y+z=400$$

$$x=240;\ \ y=60;\ \ z=100$$

Odafelé 240 km vízszintes, 60 km emelkedő és 100 km lejtő.

4.

Játék előtt:	A: x	B: y	C: z
1. játék után:	A: $x-y-z$	B: $2y$	C: $2z$
2. játék után:	A: $2(x-y-z)$	B: $2y-(x-y-z+2z)=$ $=3y-x-z$	C: $4z$
3. játék után:	A: $4(x-y-z)$	B: $2(3y-x-z)$	C: $4z-(2x-2y-2z+3y-x-z)=$ $=7z-x-y$

$$4x-4y-4z=100$$
$$6y-2x-2z=100$$
$$7z-x-y=100$$

$$x=\frac{325}{2};\ \ y=\frac{175}{2};\ \ z=50$$

5. a, b, c: a szakaszok hossza cm-ben

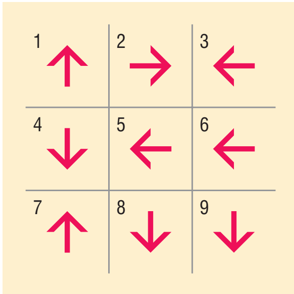
$$a+b=42$$
$$b+c=28$$
$$a+c=20$$

$$a=17;\ \ b=25;\ \ c=3$$

Mivel $a+c<b$, nem alkothatnak háromszöget.

Egybevágósági transzformációk

2. Tengelyes tükrözés a síkban



1. Számozzuk meg a nyilakat!
Tengelyesen szimmetrikus: 1–4; 2–3; 3–6; 4–7; 8–9.

2. *PP’* szakasz felező merőlegese.

3. *a)* *A*’(–1; –1); *B*’(4; –3); *C*’(–3; –5)
b) *A*’(1; 1); *B*’(–4; 3); *C*’(3; 5)

4. *A*(–3; 3); *B*(3; 1); *C*(4; 8)

5.
1. A kör középpontjából körzőzzünk olyan nagy sugárral, hogy két helyen metsze az egyenest.
2. Ezen sugárral mindkét metszéspontból körzőzünk az egyenes másik oldalán, hogy az ívek metszék egymást.
3. A kapott pont a kör tükörképének középpontja, így az adott sugárral megrajzoljuk a kör képét.

6. A középpontok által meghatározott szakasz felező merőlegese a keresett egyenes.

7. Tükrözzük *c* egyenest *b*-re. Ahol a kép metszi az *a* egyenest ott van a keresett pont.

8. A *P*’” pont az *AB* egyenesére illeszkedik, hiszen a szögfelezőre való tükrözés oldalegyenest oldalegyenesbe visz.

9. Mindkét csúcsot tükrözzük a szögfelezőre. Az egy félsíkban lévő pontok egy-egy oldalegyenest határoznak meg, melyeknek a szögfelezőn kell metszeniük egymást.
Ha a csúcsok szimmetrikusak a szögfelezőre, akkor a háromszög egyenlő szárú, és a harmadik csúcs a szögfelező egyenes bármely olyan pontja lehet, amely nem illeszkedik az adott oldalra.

10. Tükrözzük *A*-t *e*-re. $A'B \cap e$ a keresett pont.

11. Mivel az eredeti csúcsoknál lévő szög az új alakzatban 180°, az eredeti háromszög mindhárom szögének 60°-nak kell lennie. Az eredeti háromszög tehát szabályos.

Rejtvény: Attól függ, hogy a számlap számozása azonos vagy ellentétes irányú.
(Ha azonos a számozás iránya, akkor 6 óra múlva; ha ellentétes, akkor mindig ugyanazt az időt mutatják.)

3. Tengelyesen szimmetrikus alakzatok

1. *a)* hamis *b)* igaz *c)* hamis *d)* igaz *e)* hamis *f)* igaz
g) hamis *h)* igaz *i)* igaz *j)* hamis *k)* hamis

2. Tükrözzük a harmadik csúcsot a szimmetriatengelyre.

3. Mindkét csúcsot tükrözzük a szimmetriatengelyre.

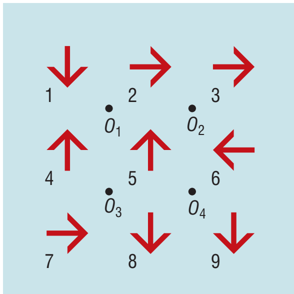
4. Tükrözzük az egyik egyenest a tengelyre. Ahol a kép metszi a másik egyenest, az a deltoid egyik csúcsa, melyet tükrözve a tengelyre, a negyedik csúcsot is megkapjuk.
Ha a tükrözésnél a kép egybeesik a másik egyenessel, akkor bármelyik pontja lehet a deltoid harmadik csúcsa.

5. A két pont által meghatározott oldalegyenes két pontban metszi a tengelyeket. Ezek csúcspontok. Ezeket tükrözve a tengelyekre, megkapjuk a másik két csúcspontot is. Ez mindig megszerkeszthető.

6. Egyik lehetőség: (1; 1); (–1; 1); (–1; –1); (1; –1).
Másik lehetőség: $\left(\sqrt{2};0\right)$; $\left(0;\sqrt{2}\right)$; $\left(-\sqrt{2};0\right)$; $\left(0;-\sqrt{2}\right)$.

7. Mindkét tengelynek egy-egy csúcsra kell illeszkednie. A tengelyekre illeszkedő csúcsokból induló oldalak egymásra szimmetrikusak, azaz egyenlőek. Így mindhárom oldal egyenlő, tahát van harmadik szimmetriatengely.

4. Középpontos tükrözés a síkban



1. Számozzuk meg a nyilakat!
Középpontosan szimmetrikus: 1–5; 2–6; 4–8; 5–9.

2. Az *AB* szakasz felezőpontja a tükrözés középpontja *B* képe *A* lesz.

3. A középpontok által meghatározott szakasz felezőpontja a tükrözés középpontja.

4. *a)* *A'*(1; –1); *B'*(–4; –3); *C'*(3; –5)
b) *A'*(3; –1); *B'*(–2; –3); *C'*(5; –5)
c) *A'*(5; –5); *B'*(0; –7); *C'*(7; –9)

5. *A*(–3; 1); *B'*(–7; 1); *C'*(–14; 0)

6. *a)* 2 cm oldalú szabályos hatszög. *b)* 2 cm oldalú 12-szög, hatágú csillag.

7. Tükrözzük az egyik egyenest a pontra. Ahol a kép metszi a másik egyenest, ott lesz az egyik pont, melyet tükrözve az adott pontra, megkapjuk a másik pontot is.

8. Egy háromszöget kapunk, hisz az eredeti háromszög csúcsainál egymás mellé kerül a három belső szög, melyek összege 180º.

9. Az egyik ilyen szelő a két metszéspont által meghatározott közös szelő. A másik szelő megszerkesztéséhez tükrözzük az egyik metszéspontra az egyik kört. A kép és a másik kör metszéspontja a kiválasztott metszésponttal meghatározzák a keresett szelőt.

10. Tükrözzük az egyik szögszárat a *P*-re. Az a pont, ahol a kép metszi a másik szárat, a *P*-vel meghatározza a keresett egyenest.

Rejtvény: Az első érmét az asztal középpontjába tegye, majd mindig az ellenfél érméjének ezen pontra való tükörképére tegye az érméit.

5. Középpontosan szimmetrikus alakzatok

1. *a)* hamis *b)* igaz *c)* hamis *d)* igaz *e)* igaz *f)* igaz
   g) hamis *h)* igaz *i)* igaz

2. A két csúcsot tükrözzük az átlók metszéspontjára.

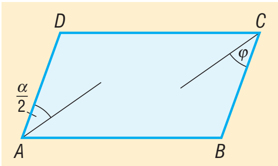
3. $C(2; -5)$; $D(4; 2)$

4. Paralelogrammát, hiszen átlói felezik egymást.

5. Tükrözzük O-ra a szög csúcsát, így a paralelogramma másik csúcsát kapjuk. Ezen keresztül húzzunk párhuzamosokat a szög száraival, melyek a paralelogramma oldalegyenesei. Ezek a szögszárakból kimetszik a hiányzó két csúcsot.

6. *a)* 72º; 108º *b)* 80º; 100º
   c) 54º; 126º *d)* $p \cdot \frac{180^\circ}{p+q}; q \cdot \frac{180^\circ}{p+q}$

7. Húzzunk α szögfelezőjével párhuzamost C-n keresztül, így kapjuk φ szöget. φ és $\frac{\alpha}{2}$ váltószögek így egyenlőek. Tehát φ egyik szára szögfelező. Mivel egy szögnek egy és csak egy szögfelezője van, a két szögfelező párhuzamos.
   Ha a két szögfelező egy egyenesbe esik, akkor a paralelogrammát két olyan háromszögre bontják, melyekben két szög egyenlő, azaz egyenlő szárúak. Tehát a paralelogramma rombusz.



8. Nem igaz, mert az átlók nem feltétlenül lennének egyenlő hosszúak, csak biztosan feleznék egymást.

Rejtvény: Van, például egyenes, sík.

6. A középpontos tükrözés alkalmazásai

1. *a)* $\frac{3}{2}$ cm; 2 cm; $\frac{5}{2}$ cm *b)* 3 dm; $\frac{7}{2}$ dm; 5 dm
   c) 3,6 m; 205 cm; 25 dm *d)* nem alkotnak háromszöget, hiszen $12 = 7{,}2 + 4{,}8$

2. *a)* 6 cm *b)* 11 dm *c)* 21,25 cm *d)* 47 mm

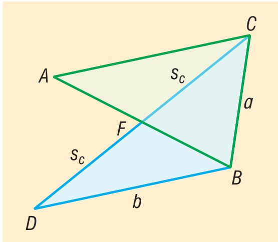
3. Az átfogó hossza a vele párhuzamos középvonal hosszának kétszerese, azaz 6 cm. Vegyük fel az átfogót, és rajzoljunk vele párhuzamos egyenest 2 cm távolságban (két párhuzamos egyenes). Rajzoljuk meg az átfogó Thalész-körét. Ez a párhuzamosokból kimetszi a háromszög harmadik csúcsát. Így 4 db egybevágó háromszöget kapunk.

4. *a)* $\frac{5}{2}$ cm *b)* $\frac{13}{2}$ dm *c)* $\frac{37}{2}$ mm *d)* $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

5. *a)* 6 cm *b)* 9 dm *c)* 18,45 m *d)* $\frac{3}{2}d$

6. Paralelogrammát határoz meg.
a) 10 cm; 8 cm *b)* 124 cm; 41 cm *c)* $2x$; y

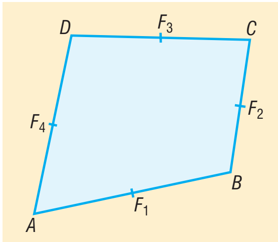
7. Szerkesszük meg az a, b, $2s_c$ oldalú háromszöget. Tükrözzük B-t F-re. Az így kapott pont a keresett háromszög harmadik csúcsa (A).



8. A felezőpontokat összekötő szakasz a két szomszédos oldal által meghatározott háromszög középvonala, melyről tudjuk, hogy párhuzamos a harmadik oldallal, mely a négyszög egyik átlója.

9. A 8. feladat alapján $F_1F_2 \parallel AC \parallel F_3F_4$ és $F_1F_2 = \frac{AC}{2} = F_3F_4$.

Mivel az $F_1F_2F_3F_4$ négyszögben két oldal hossza egyenlő és párhuzamosak, a négyszög paralelogramma.



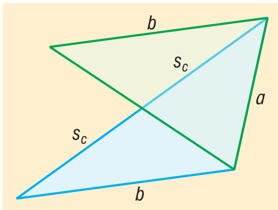
10. A 9. feladat alapján a középvonalak egy paralelogramma átlói, melyekről tudjuk, hogy felezik egymást.

11. Ha a középvonalak egyenlő hosszúak, akkor az oldalfelező pontok által meghatározott paralelogramma téglalap, tehát a négyszög átlói merőlegesek egymásra.

12. A körök páronként a harmadik oldalon, a magasság talppontjában metszik egymást. Így a szelők metszéspontja a magasságpont.

13. *a)* Az egyik oldal felezőpontjára tükrözve a háromszöget, mindig kapunk egy olyan háromszöget, melynek oldalai az egy csúcsból induló háromszögoldalak és a súlyvonal kétszerese. Ebben a háromszög egyenlőtlenség alapján

$$s_c \le \frac{a+b}{2};\ s_b \le \frac{a+c}{2};\ s_a \le \frac{b+c}{2}.$$



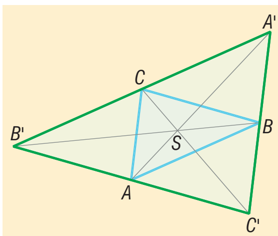
Ezeket összeadva kapjuk, hogy $s_a + s_b + s_c \le a + b + c$.

b) Tükrözzük a háromszög csúcsait mindhárom oldalfelező pontra. Így kapjuk $A'B'C'$ háromszöget.

Ebben $SA' = 2s_a - \frac{2}{3}s_a = \frac{4}{3}s_a$. Hasonlóan $SC' = \frac{4}{3}s_c$.

$SA'C'$ háromszögben a háromszög egyenlőtlenség alapján

$$\frac{4}{3}s_c + \frac{4}{3}s_a \ge 2b.$$



Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\frac{4}{3}s_a + \frac{4}{3}s_b \ge 2c,$$

$$\frac{4}{3}s_b + \frac{4}{3}s_c \ge 2a.$$

Ezeket összeadva, kapjuk:

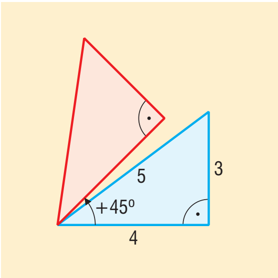
$$\frac{8}{3}(s_a + s_b + s_c) \geq 2(a+b+c).$$

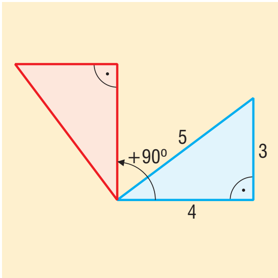
Innen

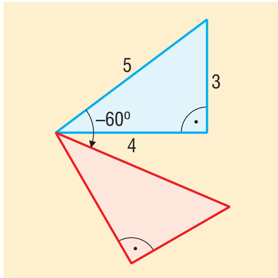
$$s_a + s_b + s_c \geq \frac{3}{4}(a+b+c).$$

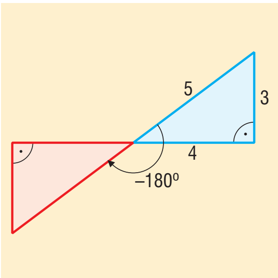
Ezzel az állítást beláttuk.

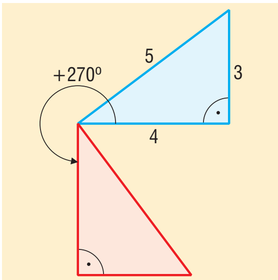
7. Pont körüli forgatás a síkban

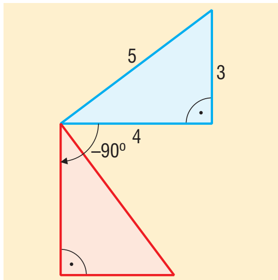
1. *a)*


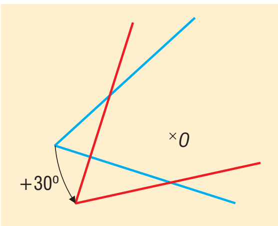
b)


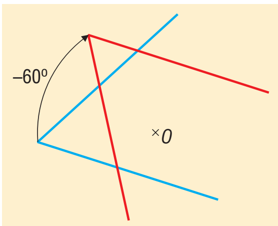
c)


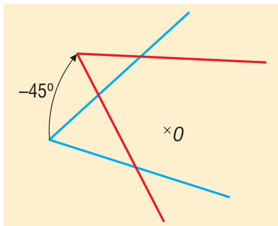
d)


e)


f)


2. *a)*


b)


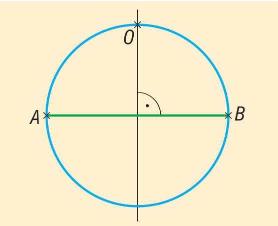
c)


3. Az *AB* szakasz felező merőlegesének pontjai.

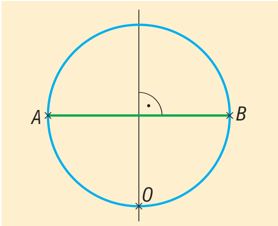
4. Az egyik szakasz egyik végpontját összekötjük a másik szakasz egyik végpontjával, majd a megmaradt végpontokat is összekötjük. Az így kapott szakaszok felező merőlegeseinek metszéspontja lesz a forgatás középpontja. Két ilyen középpont kapható.

5. Az AB szakasz adott szöghöz tartozó megfelelő látószög körívének és a szakasz felező merőlegesének metszéspontja a forgatás középpontja.

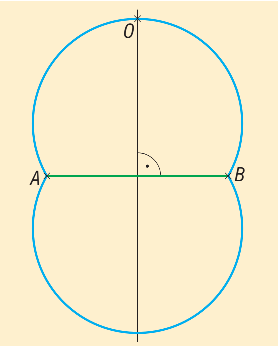
a)



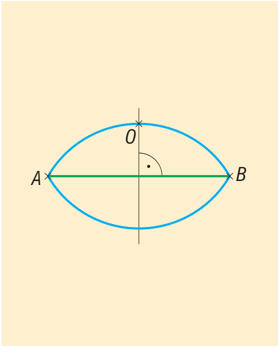
b)



c)



d)



6. *a)* $A'(-1;-1)$; $B'(-3;4)$; $C'(-5;-3)$ *b)* $A'(1;1)$; $B'(3;-4)$; $C'(5;3)$

c) $A'(1;-1)$; $B'(-4;-3)$; $C'(3;-5)$ *d)* $A'(1;1)$; $B'(3;-4)$; $C'(5;3)$

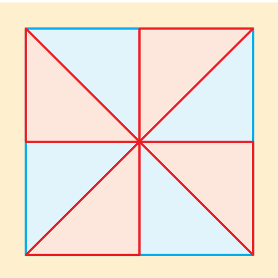
7. *a)* $(-1;1)$ vagy $(1;-1)$ *b)* $(4;-3)$ vagy $(-4;3)$

c) $(1;4)$ vagy $(-1;-4)$ *d)* $(8;-3)$ vagy $(-8;3)$

8. Forgassuk el az egyik egyenest 60º-kal. Ahol a kép metszi a másik egyenest, ott lesz a háromszög egy másik csúcsa. Ezt a pontot az előzővel ellentétes irányban forgatva 60º-kal kapjuk a harmadik csúcspontot. Két megfelelő háromszöget kaphatunk.

9. Az átlók metszéspontja körül 3-szor forgassuk el a csúcspontot 90-90º-kal.

10.



8. A pont körüli forgatás alkalmazásai I.

1. *a)* 180º *b)* 120º *c)* 270º *d)* $\frac{720^\circ}{7}$

2. *a)* 90º *b)* 60º *c)* 144º *d)* 200º

3. *a)* $\frac{3\pi}{2}$ *b)* $\frac{\pi}{12}$ *c)* $\frac{5\pi}{12}$ *d)* $\frac{7\pi}{6}$ *e)* $\frac{\pi}{8}$ *f)* $\frac{11\pi}{24}$

g) $\frac{37\pi}{28}$ *h)* $-\frac{7\pi}{12}$

4. *a)* 60º *b)* 240º *c)* 40º *d)* 75º *e)* 210º

f) $\frac{360^\circ}{\pi} \approx 114{,}6^\circ$ *g)* –30º *h)* 900º

5. *a)* Nagymutató: π m; kismutató: 5π cm.
b) Nagymutató: 2π m; kismutató: 10π cm.
c) Nagymutató: 48π m; kismutató: 240π cm.
d) Nagymutató: 672π m; kismutató: 3360π cm.
e) Nagymutató: 4032π m; kismutató: 20160π cm.
f) Nagymutató: $87{,}6\pi$ km; kismutató: $4{,}38\pi$ km.

6. *a)* π cm^2; $(4+\pi)$ cm *b)* $\frac{4\pi}{3}$ cm^2; $\left(\frac{4\pi}{3}+4\right)$ cm

c) $\frac{7\pi}{6}$ cm^2; $\left(\frac{7\pi}{6}+4\right)$ cm *d)* $\frac{16\pi}{9}$ cm^2; $\left(\frac{16\pi}{9}+4\right)$ cm

7. *a)* A hulladék: $\frac{\pi}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{16}$ m^2; $\sim 59\%$. *b)* A hulladék: $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ m^2; $\sim 36\%$.

c) A hulladék: $\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{8}$ m^2; $\sim 17\%$. *d)* A hulladék: $\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}$ m^2; $\sim 4{,}5\%$.

8. *a)* $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\% \sim 21{,}5\%$ *b)* $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\% \sim 57\%$

c) $\left(1-\frac{\pi}{8}\right)\% \sim 60{,}7\%$ *d)* $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\% \sim 57\%$

9. A pont körüli forgatás alkalmazásai II.

1. *a)* A forgatás szöge: 120º; 240º.
b) A forgatás szöge: 90º; 180º; 270º.
c) A forgatás szöge: 72º; 144º; 216º; 288º.
d) A forgatás szöge: 30º; 60º; 90º; 120º; 150º; 180º; 210º; 240º; 270º; 300º; 330º.
Súlypont körül forgatunk.

2. *a)* 3 tengelyes tükrözés, az oldalfelező merőlegesekre.
Középpont körüli 120º, 240º-os forgatás.
b) 2 tengelyes tükrözés, az átlókra.
2 tengelyes tükrözés, az oldalfelező merőlegesekre.
Középpont körüli 90º, 180º, 270º-os forgatás.
Középpontra való tükrözés.

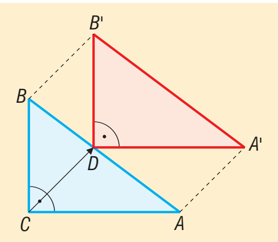
3. *a)* igaz *b)* hamis *c)* hamis *d)* igaz *e)* igaz *f)* igaz
g) hamis *h)* hamis

4. A súlypont körül forgassuk el a csúcsot kétszer, 120º-kal.

5. A két csúccsal szerkesztünk egy szabályos háromszöget, majd az új csúcs körül elforgatjuk egymás után 5-ször 60º-kal a háromszöget.

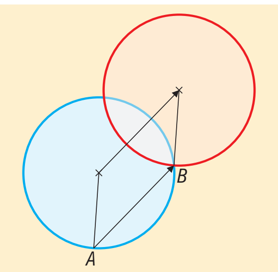
10. Párhuzamos eltolás, vektorok

1.



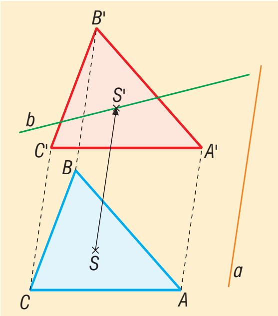
2. $A-C-F$; $D-E$

3.



4. Nem oldható meg, ha a két egyenes párhuzamos.

a)

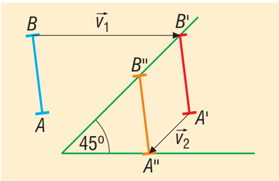


$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{SS'}$

b) Ugyanígy.

5. *a)* igaz *b)* hamis *c)* igaz *d)* hamis *e)* igaz

6.



$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

7. $\vec{a} = \vec{e} = -\vec{h}$; $\vec{b} = -\vec{f}$; $\vec{i} = -\vec{j} = \vec{d} = -\vec{c}$

8. A *B* pontot toljuk el a folyó felé a folyóra merőleges és a folyó szélességével egyenlő nagyságú vektorral. Ahol az *AB'* egyenes metszi a folyó *A* felőli partvonalát, ott kell épülnie a hídnak.

11. Műveletek vektorokkal

1. *a)* $\overrightarrow{AC}$ *b)* $2\overrightarrow{AD}$ *c)* $\overrightarrow{GB}$ *d)* $\overrightarrow{DB}$ *e)* $\overrightarrow{DF}$

3. *a)* (5; 3) *b)* (5; 2) *c)* (7; 7) *d)* (11; 1) *e)* (2; 0) *f)* $(4+a; 3+b)$

4. *a)* (2; –4) *b)* (1; –3) *c)* (6; –4) *d)* (–1; –2) *e)* (0; –12) *f)* $(p+2; q-5)$

5. *a)* $\vec{v}(5; 0)$ *b)* $\vec{v}(-9; -2)$ *c)* $\vec{v}(2; 2)$

6. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

12. Alakzatok egybevágósága

1. *a)* $a=\dfrac{2m}{\sqrt{3}}$ alapján oldalaik egyenlőek, tehát egybevágóak.

b) Ugyanaz, mint *a)* mivel $s=m$.

c) Mivel $m=\dfrac{3}{2}R$, az *a)* alapján $a=\dfrac{3R}{\sqrt{3}}$ és így az oldalaik egyenlőek, ha a sugarak egyenlőek

2. *a)* A befogók az átfogó $\sqrt{2}$-ed részei, így ha az átfogók egyenlőek, akkor a befogók is. Vagy egy-egy oldalban és a rajta fekvő két szögben (45º; 45º) egyenlőek.

b) Egy-egy oldalban és a rajta fekvő két szögben (90º; 45º) egyenlőek.

c) Ugyanaz, mint *a)* hisz a körülírt kör sugara az átfogó fele.

3. *a)* Két-két oldalban és a közbezárt szögben egyenlőek.

b) A szemközti szög legyen α; egy-egy oldaluk és a rajta fekvő két szögük (90º; 90º – α) egyenlő.

c) Kössük össze az átfogó felezőpontját a szemközti csúccsal. Mivel ez a köréírt kör sugara egyenlő az átfogó felével. A két háromszögben kapott, a sugár és a magasság által meghatározott derékszögű háromszögek egybevágóak (két-két oldalban és a nagyobbikkal szemközti szögben egyenlőek). Ebből adódik, hogy ezen sugarak által meghatározott két-két részében, a két eredeti derékszögű háromszögnél, két oldalban és a közbezárt szögben egyenlőek, így egybevágóak.

4. *a)* Legyen a szárszög α, ekkor egy-egy oldaluk és a rajta fekvő két-két szögük $\left(90º-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ egyenlőek.

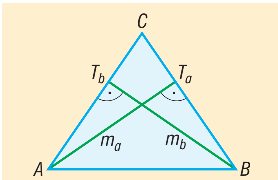
b) Legyen az alap a, így $b=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+m_a^2}$, tehát ha az alap és a hozzá tartozó magasságuk egyenlő, akkor a száraik is egyenlőek.

c) Legyen az alapon fekvő szög β, a magasság két derékszögű háromszögre vágja mindkét háromszöget. Ezek páronként egybevágóak, hisz egy oldaluk (magasság) és a rajta fekvő két-két szögük (90º; 90º – β) egyenlő. Így a két háromszög is egybevágó.

5. Ha két szögük egyenlő, akkor mindhárom szögük egyenlő. Az adott oldal azonban lehet alap vagy szár is, így nem egyértelmű a megadás, a két háromszög nem feltétlenül egybevágó.

6. Ha a két szár egybevágó, akkor azok csak háromszögek lehetnek. Tehát a szelő egyenes egy csúcson halad át és egy oldalt metsz. A két keletkezett háromszögben, az eredetileg egymással érintkező két oldallal szemközti szögek egyenlőek az egybevágóság miatt. Így az eredeti háromszögben van két egyenlő szög, tehát a háromszög egyenlőszárú.

7. Legyen a két magasság m_a és m_b. Az $AT_aC_\triangle$ és a $BT_bC_\triangle$ egybevágó, mivel egy-egy oldaluk ($m_a=m_b$) és a rajta fekvő két szögük (90º; 90º – γ) egyenlő. Tehát $a=b$, azaz a háromszög egyenlőszárú.
Másként: A területképlet alapján $\dfrac{a\cdot m_a}{b}=\dfrac{b\cdot m_b}{2}$, és $m_a=m_b$, tehát $a=b$.



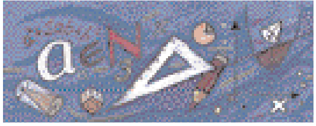
8. *a)* Két átlójuk egyenlő;
egy oldaluk és egy szögük egyenlő;
egy oldal és egy átló egyenlő;
egy oldal és magasság egyenlő.

b) Két átlójuk és egy oldaluk egyenlő;
két különböző oldaluk és egy átlójuk egyenlő.

c) Két átlójuk és egy oldaluk egyenlő;
két különböző oldaluk és egy átlójuk egyenlő;
két különböző oldaluk és egy szögük egyenlő.

d) Magasságuk, két száruk és egy alapjuk egyenlő;
magasságuk, két alapjuk és egy száruk egyenlő;
egy alapjuk, magasságuk és két átlójuk egyenlő.

9. Az A csúcs körüli –90º-os forgatásnál $E' = C$ és $B' = G$. Így $EAB_{\triangle} \cong CAG_{\triangle}$.



Statisztika

1. Az adatok ábrázolása

Rejtvény: A *c)* válasz a helyes, és azt is jelölte a nézők többsége.

2. Az adatok jellemzése

1. $Mo = 15$; $\overline{Y} = 22$; $Me = 15$

2. $Mo = 19$; $\overline{Y} = 19{,}6$; $Me = 19$

3. *a)* $\overline{Y} = 150\,000$
b) $\overline{Y}_{\text{nő}} = 150\,000$; $\overline{Y}_{\text{ffi}} = 150\,000$
c) $Me_{\text{nő}} = 100\,000$; $Me_{\text{ffi}} = 150\,000$
d) Nő hivatkozhat a móduszra, mediánra. Az igazgató az átlagra.

4. Módusszal.

5. 710 pont az összeg.

6. $\dfrac{4 \cdot 75 + 90}{5} = 78$ az új átlag.

7. Összesen 800 pontot kellett elérnie, de csak 790 pontot ért el. Még 10 pont hiányzik.

8. $\dfrac{25 \cdot 82 + 27 \cdot 69}{25 + 27} = 75{,}25$ az átlag.

9. $$\frac{95 + 97 + 91 + 101}{4} + 1 = \frac{95 + 97 + 91 + 101 + x}{5}$$
$$x = 101$$
101 pontos lett az ötödik.

10. *a)* hamis *b)* hamis *c)* hamis *d)* igaz *e)* hamis
Mo: 5-tel nő, *d)* igaz; *Me*: 5-tel nő, *d)* igaz.

11. *a)* hamis *b)* hamis *c)* igaz *d)* hamis *e)* hamis
Mo: *c)* igaz; *Me*: *c)* igaz.

12. A *b)* hamis. Bori a legfiatalabb.

13. 8 kg-mal nehezebb.

14. *n*: a megkérdezettek száma
$$56n - 69 = (n - 1) \cdot 55$$
$$n = 13$$

13 főt kérdeztek meg. Akkor jöhet szóba a legnagyobb szám, ha 11 fő egy könyvet sem olvasott, 1 fő olvasott 68 könyvet és 1 fő a többi könyvet, $12 \cdot 55 = 660$.
660 könyv lehet a legnagyobb válaszul adott szám.

15. Smith átlaga jobb.

Rejtvény: Nem, a középső fiúmagassága a medián és a nála magassabbak közel olyan magasak, mint ő, de a kisebbek jóval kisebbek. Így az átlagmagasság kisebb lesz, mint a medián.